

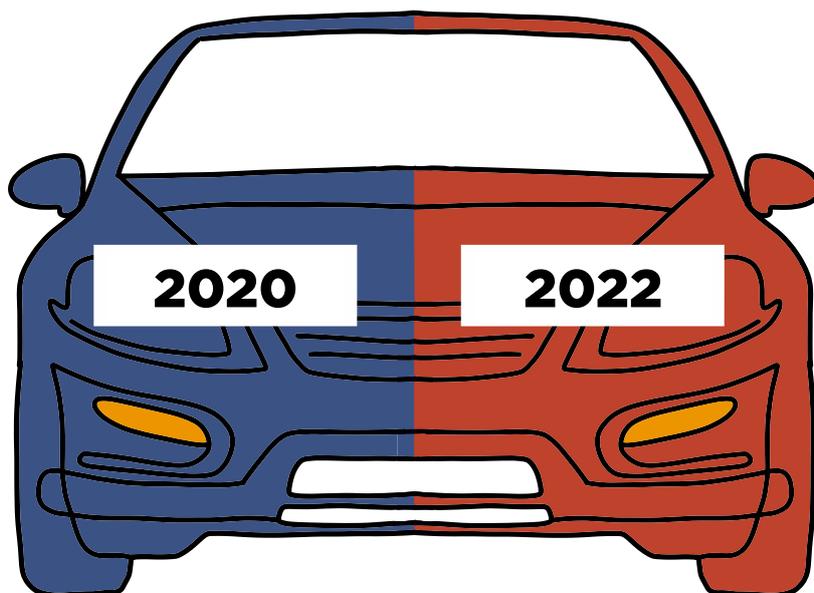


Progresiones aritméticas y geométricas

Actividad

Aplicamos nuestros conocimientos de progresión aritmética y geométrica en la vida cotidiana

¡Hola! Gracias por conectarte y ser parte de La Pre.



Progresión aritmética

Se denomina progresión aritmética a aquella sucesión de números en la que cada término se obtiene sumando una misma cantidad al término anterior.

Progresión geométrica

Se denomina progresión geométrica a una sucesión de números en la que el cociente (o razón) entre dos términos consecutivos es siempre igual.

Por lo tanto, cada término se obtiene multiplicando por una misma cantidad (la razón) al término anterior.

Un ejemplo de progresiones lo podemos ver en un campeonato de tenis, pues siempre hay un participante que gana a otro en la competencia final. Para llegar ahí se han celebrado semifinales donde han participado 4 jugadores. Y en la etapa anterior han competido 8 tenistas, y así sucesivamente, ya que en cada etapa de la competición siempre clasifica la mitad de jugadores para la siguiente ronda. En conclusión, el número de participantes en cada etapa siempre será la mitad que en la ronda anterior.

Es decir, tenemos una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$.



Retos



1. Una estudiante escuchó una noticia interesante a las 10 a. m. y se lo contó a tres de sus amigas, cada una de las cuales lo comunicó a otras tres amigas, y así sucesivamente. Si cada una de ellas se demora en comunicar la noticia 5 minutos, ¿cuántas personas conocen la noticia a las 10:30 a. m.?
 - a) 1000
 - b) 1090
 - c) 1093
 - d) 1005
 - e) 1094
2. El tratamiento de una enfermedad dura 8 días, y la dosis del medicamento es de 100 mg el primer día y 10 mg menos cada día siguiente. ¿Cuántos miligramos en total tomará el paciente?
 - a) 30 mg
 - b) 520 mg
 - c) 108 mg
 - d) 170 mg
 - e) 1040 mg
3. Las edades de 3 personas están en progresión geométrica, cuya razón es 3. Si se sabe que el cuádruple de la suma de las edades de los menores excede en 28 años a la del mayor, calcular la edad de las 3 personas.
 - a) 4; 12 y 36
 - b) 4; 7 y 13
 - c) 4; 12 y 78
 - d) 4; 18 y 24
 - e) 4; 12 y 24
4. ¿Qué profundidad tiene un tanque de cemento si por cada metro de construcción se paga S/ 500, y por cada uno de los metros restantes, S/ 25 más que el anterior; además, se sabe que en total se pagó S/ 3375?
 - a) 45 m
 - b) 6 m
 - c) 18 m
 - d) 9 m
 - e) 30 m
5. Un alpinista planifica subir a la cima de un nevado de la siguiente manera: el primer día escalará 750 m; el segundo día, 625; el tercer día, 500 m; el cuarto, 375 m, y así sucesivamente. El último día recorrerá 125 m. Calcular la cantidad de metros que recorrió hasta llegar a la cima del nevado.
 - a) 2625
 - b) 2600
 - c) 2265
 - d) 2628
 - e) 2725
6. El 2.º y 6.º término de una P. G. son 1 y $\frac{1}{16}$, respectivamente. Calcular el 5.º término.
 - a) $\frac{1}{32}$
 - b) $\frac{1}{8}$
 - c) $\frac{1}{4}$
 - d) $\frac{1}{6}$
 - e) $\frac{1}{2}$

7. Los términos de una progresión geométrica creciente están representados por las siguientes expresiones:

$$x + 5; 5x + 4; 11x + 6; 26x + 4; \dots$$

Calcular el 5.º término de la progresión.

- a) 56
- b) 28
- c) 61
- d) 112
- e) 2

8. Calcular la suma de los términos de las progresiones geométricas infinitas M y N. Si:

$$M = 1; 1/3; 1/9; 1/27; 1/81; \dots \text{ y}$$

$$N = 1; 1/5; 1/25; 1/125; 1/625; \dots$$

- a) $3/8$
- b) $2/3$
- c) $4/3$
- d) $3/4$
- e) $11/4$

9. El valor de depreciación de una máquina es de S/ 1360 por cada año. Al cabo de 8 años, ¿cuál será su valor si su precio de compra inicial fue de S/ 27 200?

- a) 36 720
- b) 17 720
- c) 17 680
- d) 16 780
- e) 22 320

10. Calcular la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética $5x + 2y; 8x - 6; x + 5y; 6x + 3y; \dots$

- a) 405
- b) 462
- c) -54
- d) -462
- e) -405

11. Una estudiante está ahorrando sus propinas. Si inicia con S/ 10 la primera semana y aumenta cada semana S/ 4, ¿cuántas semanas habrá ahorrado si al final tiene S/ 319?

- a) 13
- b) 10
- c) 11
- d) 14,5
- e) 12

12. Calcular el número de múltiplos de 13 que están comprendidos entre 203 y 501 y dar como respuesta dicho número al cuadrado.

- a) 23
- b) 526
- c) 46
- d) 484
- e) 529



13. Calcular la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica ilimitada si su primer término es $\frac{1}{2}$ y la razón $\frac{1}{3}$.

- a) $\frac{2}{3}$
- b) $\frac{5}{6}$
- c) $\frac{3}{4}$
- d) $\frac{3}{2}$
- e) $\frac{1}{6}$

14. ¿Al cabo de cuánto tiempo una rueda que parte del reposo da 3540 vueltas si gira aumentando su velocidad a razón de 2 vueltas cada minuto?

- a) 55 min
- b) 59 min
- c) 45 min
- d) 58 min
- e) 60 min

15. Se tiene una progresión geométrica donde el producto del primer término por el tercero es 64 y el sexto término es 128. Calcular el cuarto término.

- a) 32
- b) 24
- c) 64
- d) 30
- e) 48



Resolvemos los retos



1. Respuesta c.

Veamos el cálculo de los intervalos de tiempo:



$$n = 7$$

Reemplazamos datos en la fórmula de la suma de términos de la P. G.:

$$S_n = (a_1 - a_n \cdot r) / (1 - r)$$

$$S_n = [1 - 729(3)] / (1 - 3)$$

$$S_n = (1 - 2187) / (-2)$$

$$S_n = (-2186) / (-2)$$

$$S_n = 1093$$

A las 10:30 a. m. conocerán la noticia 1093 personas.

2. Respuesta b.

Primer día: 100 mg

Segundo día: $100 - 10 = 90$

Tercer día: $90 - 10 = 80$

Para calcular el octavo día aplicamos la fórmula del término enésimo de una P. A.:

$$a_n = a_1 + (n - 1)(d)$$

$$a_n = 100 + (8 - 1)(-10)$$

$$a_n = 100 - 70$$

$$a_n = 30$$

Para calcular la cantidad total de miligramos aplicamos la fórmula de la suma:

$$S_n = 1/2(a_1 + a_n)(n)$$

$$S_n = 1/2(100 + 30)(8)$$

$$S_n = 1/2(130)(8)$$

$$S_n = 520 \text{ mg}$$

El total de miligramos es 520.

3. Respuesta a.

Edades:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2$$

Planteamos la ecuación:

$$4(a_1 + a_1 \cdot 3) - 28 = a_1 \cdot 9$$

$$4(4a_1) - 28 = 9a_1$$

$$16a_1 - 9a_1 = 28$$

$$a_1 = 4$$

Las edades son 4, 12 y 36.

4. Respuesta b.

La diferencia es 25.

La suma: S/ 3375

Aplicamos la fórmula de la suma, aunque no se conozca el último término ni el número de términos:

$$S_n = 1/2 (a_1 + a_n)(n)$$

$$3375 = 1/2 [(500 + 500 + (n - 1)(25)](n)$$

$$3375 = 1/2 [1000 + 25n - 25](n)$$

$$3375 = 1/2 [975 + 25n](n)$$

$$3375(2) = 975n + 25n^2 \quad (\text{dividimos entre 25})$$

$$270 = 39n + n^2$$

$$n^2 + 39n - 270 = 0 \quad (\text{factorizamos})$$

$$(n + 45) \wedge (n - 6) = 0$$

$$n_1 = -45 \wedge n_2 = 6$$

La profundidad del tanque es de 6 m.

5. Respuesta a.

Calculamos primero el número de días que utilizará aplicando la fórmula del término enésimo de una P. A., porque la diferencia entre los datos es la misma:

$$d = 625 - 750 = -125$$

$$d = 500 - 625 = -125$$

$$d = 375 - 500 = -125$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)(d)$$

$$125 = 750 + (n - 1)(-125)$$

$$125 = 750 - 125n + 125$$

$$125n = 750$$

$$n = 6$$

Calculamos ahora la suma de los tramos que recorrerá:

$$S_n = 1/2(a_1 + a_n)(n)$$

$$S_n = 1/2(750 + 125)(6)$$

$$S_n = 1/2(875)(6)$$

$$S_n = 2625$$

El alpinista subirá 2625 m.

6. Respuesta b.

Por definición:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot r = 1 \text{ (de esta igualdad se obtiene } a_1 = 1/r)$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 = 1/16$$

Reemplazando $a_1 = 1/r$ se tiene:

$$1/r(r^5) = 1/16$$

$$r^4 = 1/16$$

$$r = 1/2$$

$$\text{El 5.º término será: } a_5 = a_1 \cdot r^4$$

Reemplazamos valores:

$$a_5 = (1/1/2)(1/2)^4$$

$$a_5 = (2)(1/16)$$

$$a_5 = 2/16$$

$$a_5 = 1/8$$

El 5.º término es 1/8.

7. Respuesta d.

Por definición: $r = (5x + 4)/(x + 5)$ y $r = (11x + 6)/(5x + 4)$

Igualamos ambas expresiones:

$$\frac{5x + 4}{x + 5} = \frac{11x + 6}{5x + 4} \text{ (Aplicamos la propiedad de las proporciones)}$$

$$(5x + 4)(5x + 4) = (x + 5)(11x + 6)$$

$$25x^2 + 40x + 16 = 11x^2 + 6x + 55x + 30 \quad (\text{transponemos términos})$$

$$14x^2 - 21x - 14 = 0 \quad (\text{dividimos entre 7})$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \quad (\text{factorizamos})$$

$$(2x + 1)(x - 2) = 0 \quad (\text{igualamos a 0})$$

$$2x + 1 = 0 \wedge x - 2 = 0$$

$$x = -1/2 \wedge x = 2$$

Calculamos la razón reemplazando el valor de x hallado en el 4.º término:

$$r = [5(2)+4]/(2+ 5) = 14/7 = 2$$

$$a_5 = a_4 \cdot r = [26(2) + 4](2) = 56(2) = 112$$

El 5.º término es 112.

8. Respuesta e.

$$M = 1; 1/3; 1/9; 1/27; 1/81; \dots$$

$$\text{Expresamos: } M = 1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + \dots$$

$$\text{Factorizamos: } M = 1 + 1/3 \underbrace{(1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + \dots)}_M$$

$$M = 1 + 1/3(M) \quad (\text{resolvemos})$$

$$3M = 3 + M$$

$$2M = 3$$

$$M = 3/2$$

Hacemos el mismo proceso con los términos de N :

$$\text{Expresamos: } N = 1 + 1/5 + 1/25 + 1/125 + 1/625; \dots$$

$$\text{Factorizamos: } N = 1 + 1/5 \underbrace{(1 + 1/5 + 1/25 + 1/125 + \dots)}_N$$

$$N = 1 + 1/5(N)$$

$$5N = 5 + N$$

$$4N = 5$$

$$N = 5/4$$

$$\text{Sumamos } M + N: 3/2 + 5/4 = 11/4$$

9. Respuesta c.

Valor inicial: 27 200

Depreciación: 1360

Número de años: 8

Hallamos el término a_8 (término enésimo):

$$a_8 = a_1 + (n - 1)(d)$$

$$a_8 = 27\,200 + (8 - 1)(-1360)$$

$$a_8 = 27\,200 + 7(-1360)$$

$$a_8 = 27\,200 - 9520$$

$$a_8 = 17\,680$$

Al término de los 8 años, la máquina costará S/ 17 680.

10. Respuesta e.

Por definición, la “diferencia” de dos términos sucesivos de una P. A. se halla restando un término con el anterior.

$$d = (8x - 6) - (5x + 2y) = 8x - 6 - 5x - 2y = 3x - 6 - 2y \quad (1)$$

$$d = (x + 5y) - (8x - 6) = x + 5y - 8x + 6 = -7x + 5y + 6 \quad (2)$$

$$d = (6x + 3y) - (x + 5y) = 6x + 3y - x - 5y = 5x - 2y \quad (3)$$

Ahora con las ecuaciones planteadas vamos a hallar los valores de x e y .

Iguamos el (1) y (3)

$$3x - 6 - 2y = 5x - 2y$$

$$-6 = 2x$$

$$-3 = x$$

Iguando (3) y (2):

$$5x - 2y = -7x + 5y + 6$$

$$-7y = -12x + 6 \quad (\text{reemplazamos } x)$$

$$-7y = -12(-3) + 6$$

$$-7y = 36 + 6 = 42$$

$$y = 42/-7$$

$$y = -6$$

Los términos de la P. A. serán -27; -30; -33; -36;...

Como piden la suma de los 10 primeros, hallaremos el término 10 primero:

$$a_{10} = -27 + (10 - 1)(-3)$$

$$a_{10} = -27 + (9)(-3)$$

$$a_{10} = -27 - 27$$

$$a_{10} = -54$$

Aplicamos la fórmula de la suma:

$$S = 1/2(-27 + -54)(10)$$

$$S = 1/2(-81)(10)$$

$$S = 05$$

La suma de los 10 términos será -405.

11. Respuesta c.

$$a_1 = 10$$

$$a_2 = 14$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n = 10 + (n - 1)(4)$$

$$a_n = 10 + 4n - 4$$

$$a_n = 6 + 4n$$

Reemplazamos los datos en la fórmula de la suma:

$$319 = 1/2(10 + 6 + 4n)(n)$$

$$319 = 1/2(16 + 4n)(n)$$

$$319 = 1/2 (16n + 4n^2) \quad (\text{simplificamos})$$

$$319 = 8n + 2n^2 \quad (\text{ordenamos y factorizamos})$$

$$0 = 2n^2 + 8n - 319$$

$$0 = (2n + 29)(n - 11)$$

$$2n + 29 = 0 \wedge n - 11 = 0$$

$$n_1 = -29/2 \wedge n_2 = 11$$

Estuvo ahorrando 11 semanas.

12. Respuesta b.

$$a_1 = 208$$

$$a_n = 494$$

$$494 = 208 + (n - 1)(13)$$

$$494 = 208 + 13n - 13$$

$$494 = 195 + 13n$$

$$494 - 195 = 13n$$

$$299/13 = n$$

$$n = 23$$

Entonces, $n^2 = 23^2 = 529$

13. Respuesta c.

$$a_1 = 1/2 \quad r = 1/3$$

$$S = a_1 / (1 - r) \quad (\text{reemplazamos})$$

$$S = 1/2 / (1 - 1/3) \quad (\text{restamos en el denominador})$$

$$S = 1/2 / 2/3 \quad (\text{dividimos})$$

$$S = 3/4$$

La suma será $3/4$.

14. Respuesta b.

$$a_1 = 0$$

$$d = 2 \text{ vueltas}$$

$$\text{Total de vueltas} = 3540$$

$$a_n = 0 + (n - 1)(2)$$

$$a_n = 2n - 2$$

$$3540 = 1/2 (0 + 2n - 2)(n) \quad (\text{simplificamos})$$

$$3540 = (n - 1)(n)$$

$$3540 = n^2 - n \quad (\text{factorizamos})$$

$$n^2 - n - 3540 = 0$$

$$(n - 60)(n + 59) = 0$$

$$n_1 = 60 \wedge n_2 = -59$$

Entonces, tardará 59 minutos, ya que partió del reposo.

15. Respuesta a.

$$a_1 = a$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2$$

$$\text{Producto: } a_1 \cdot a_3 = a_1 (a_1 \cdot r^2) = a_1^2 \cdot r^2 = (a_1 \cdot r)^2 = 64$$

$$\text{Deduciendo: } a_1 \cdot r = 8$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 = a_1 \cdot r \cdot r^4 = 128$$

Entonces:

$$8r^4 = 128$$

$$r^4 = 16$$

$$r = 2$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 = (a_1 \cdot r) \cdot r^2 = 8 \cdot r^2 = 8(2)^2 = 32$$

El cuarto término es 32.

¡Sigamos aprendiendo... La Pre!

