La Pre

APRENDO EN CASA

Promo 2020

SOMOS IMPARABLES

Razonamiento Matemático

mejor educación, mejores peruan@s

PERÚ | Ministerio de Educación

Números y Operaciones III (Divisibilidad)

Actividad

Resolvemos situaciones o retos que involucren la aplicación de divisibilidad.

¡Hola! Gracias por conectarte y ser parte de La Pre.

Divisibilidad

Un número entero A es divisible entre otro número entero positivo B si A se divide exactamente entre B.

Multiplicidad

Un número entero A es múltiplo de un número entero positivo B si A es el resultado de multiplicar B por una cantidad entera.

Criterios de divisibilidad

1. Criterios de divisibilidad entre potencias de 2

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{2} \longleftrightarrow e = \overset{\circ}{2}$

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{4} \longleftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{4}$

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{8} \longleftrightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{8}$

2. Criterio de divisibilidad entre 3 o 9

$\overline{abcd} = \overset{\circ}{3} \longleftrightarrow a + b + c + d = \overset{\circ}{3}$

$\overline{abcd} = \overset{\circ}{9} \longleftrightarrow a + b + c + d = \overset{\circ}{9}$

3. Criterios de divisibilidad entre potencias de 5

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{5} \longleftrightarrow e = \overset{\circ}{0} \text{ ó } 5$

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{25} \longleftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{25}$

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{25} \longleftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{25}$

4. Criterio de divisibilidad entre 7

$\overset{1231231}{\overline{abcdefg}} = \overset{\circ}{7} \longleftrightarrow a - 2b - 3c - d + 2e + 3f + g = \overset{\circ}{7}$

5. Criterio de divisibilidad entre 11

$\overset{+-+-+}{\overline{abcde}} = \overset{\circ}{11} \longleftrightarrow a - b + c - d + e = \overset{\circ}{11}$

6. Criterio de divisibilidad entre 13

$\overset{1431431}{\overline{abcdefg}} = \overset{\circ}{13} \longleftrightarrow a + 4b + 3c - d - 4e - 3f + g = \overset{\circ}{13}$

(1, −3, −4, −1, 3, 4)

Ecuaciones diofánticas o diofantinas

Una ecuación diofántica o ecuación diofantina es una ecuación algebraica de dos o más variables, donde sus coeficientes son números enteros y se busca soluciones entero positivas.

Notación: $ax + by = c$

Donde: a, b y c $\quad Z$

Cantidad de divisores de un número N. CD (N)

Si la descomposición canónica del número $N = A^a.B^b.C^c$

$\longrightarrow$ CD(N) = (a +1) (b +1) (c+1)

Donde:

N: número entero

A, B, C: Factores primos de N.

a, b, c: exponentes de los factores primos

CD(N): Cantidad de divisores de N.

Retos

1. A un congreso asiste una cantidad entre 100 y 200 médicos, de los cuales los 2/7 son cirujanos y los 5/11 son ginecólogos. ¿Cuántos médicos asistieron en total?

   a) 180
   b) 140
   c) 110
   d) 190
   e) 154

2. Hallar el valor de n para que el número de divisores de $N = 30^n$ sea el doble de divisores de $M = 15 \times 18^n$.

   a) 5
   b) 6
   c) 7
   d) 8
   e) 9

3. ¿Cuántos ceros se debe colocar a la derecha del número 49 para que el resultado tenga 147 divisores?

   a) 2
   b) 4
   c) 6
   d) 8
   e) 10

4. Calcule cuántos números enteros comprendidos entre 800 y 1400 existen tales que terminan en cifra 3 y sean múltiplo de 19.

   a) 4
   b) 3
   c) 9
   d) 8
   e) 2

5. Al dividir el número N entre 7 se obtiene como residuo 4. Además, al dividir 3N entre 11 también se obtiene como residuo 4. Halle la cantidad de divisores del menor valor posible de N.

   a) 10
   b) 12
   c) 15
   d) 20

6. ¿Qué números de tres cifras son múltiplos de 12 y terminan en 12? Calcule la suma de estos números.

   a) 912
   b) 1224
   c) 1524
   d) 1836

7. En el mes de marzo de cierto año bisiesto hubo exactamente cuatro martes y cuatro sábados. ¿Qué día de la semana fue el 23 de setiembre?

   a) jueves
   b) miércoles
   c) viernes
   d) sábado

8. A una reunión asisten 250 personas. Si de los varones la quinta parte son abogados; la sexta parte, médicos; y la sétima parte, ingeniero, ¿cuántas mujeres asistieron a dicha reunión?

   a) 75
   b) 75
   c) 80
   d) 40
   e) 120

9. ¿Cuántos numerales de tres cifras son PESI con 36?

a) 180
b) 600
c) 300
d) 150
e) 450

10. Romina puede ahorrar S/ 30 diarios, pero cada día que se encuentra con su amiga María gasta S/ 7, y si no se encuentra con su amiga María, sale con Rosa, con quien gasta S/ 8. Averigüe a cabo de cuántos días ha logrado ahorrar S/ 223, a pesar de que cada día, sin excepción, salió con una de las amigas. Calcule cuántos días han transcurrido como máximo

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

11. Andrea tiene menos de 70 años. Su edad es un número que tiene dos dígitos y es divisible por 3, 5 y 9. Halle la diferencia entre el mayor y el menor de los dígitos de dicho número.

a) 1
b) 5
c) 3
d) 9
e) 4

12. Se calcula el producto de todos los números naturales del 1 al 50. ¿En cuántos ceros acaba el resultado?

a) 10
b) 12
c) 11
d)13

13. ¿Cuál es el menor número que al ser dividido entre 7, 6, 5 o 3, deja como residuo el máximo para cada divisor empleado?

a) 200
b) 209
c) 210
d) 219

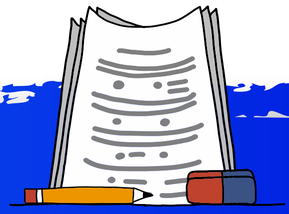
14. Si la cantidad de divisores de $21^n . 35^n$ *es* 225, halle la cantidad de divisores propios de $\overline{nn}^n$.

a) 39
b) 30
c) 42
d) 44
e) 45

15. ¿Cuántos divisores 12 tiene *A* si la descomposición canónica de *A* es $2^4 \times 3^6 \times 5^3$?

a) 60
b) 56
c) 72
d) 75

Resolvemos los retos



1. **Respuesta e.**

   Cantidad de asistentes: N
   Si: $100 < N < 200$

   Cirujanos: $\frac{2}{7} \longrightarrow N = \overset{\circ}{7}$

   Ginecólogos: $\frac{5}{11} \longrightarrow N = \overset{\circ}{11}$

   Aplicamos la propiedad de los múltiplos:

   $N \{\overset{\circ}{7}\ \overset{\circ}{11} \Rightarrow N = \underline{MCM\ (\overset{\circ}{7}; \overset{\circ}{11})} = \overset{\circ}{77}$

   $\therefore 100 < \overset{\circ}{77} < 200$

   $N = 154$

2. **Respuesta c.**

   Descomponemos en sus factores primos:
   $N = 30 = 2^n \,.\, 3^n \,.\, 5^n$
   $M = 15 \times 18^n = 3 \,.\, 5\ (2^n \,.\, 3^{2n})$
   $M = 3^{2n} + 1 \,.\, 2^n \,.\, 5$

   Calculamos la cantidad de divisores en N:
   $CD(N) = (n + 1)^3$

   Calculamos la cantidad de divisores de M
   $CD(M) = (2n + 2)(n + 1)2 = 4(n+1)^2$

   Obtenemos el valor de **n** si:
   $CD(N) = 2CD(M)$
   $(n + 1)^3 = 2\ [4(n + 1)^2]$
   $n + 1 = 8$
   $n=7$

3. **Respuesta c.**

   Si:
   $N = 49 \times 10^n$
   $N = 7^2 \,.\, 2^n \,.\, 5^2$

   Calculamos n en la cantidad de divisores de N:
   $CD(N) = 3(n + 1)^2$
   $\cancel{147} = \cancel{3}(n + 1)^2$
   $49 = (n + 1)^2$
   $n + 1 = \sqrt{49}$
   $n = 6$

4. **Respuesta b.**

$800 < N < 1400$
$N = 19 \Rightarrow 19K$

El valor de K está entre los siguientes valores:
$\cancel{800} < \overset{\circ}{19}K < \cancel{1400}$
$42,... < K < 73,...$
$43 \leq K \leq 73$

Como los N deben terminar en 3, entonces K debe terminar en 7:
Valores de k $=\{47,57,67\}$

Por lo tanto, son 3 números enteros con la condición.

5. **Respuesta a.**

$$\begin{array}{r|l} N & 7 \\ \hline 4 & C1 \end{array} \qquad \wedge \qquad \begin{array}{r|l} 3N & 11 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$N = C_1 + 4 = 3N = 11C_2 + 4$

$3N = 21C_1 + 12$

$\Rightarrow 12C_1 + 12 = 11C_2 + 4$

$21C_1 + 8 = 11C_2 \longleftarrow \overset{\circ}{11}$

$22C_1 - C_1 + 8 = 11\ C_2$

$8 + \overset{\circ}{11} = C_1 \ / \ \overset{\circ}{11} = 0$

$8 = C_1$

$\therefore N = 7(8) + 4 \qquad N = 22 . 3 . 5$

$N = 60 \qquad CD_N = (3)(2)(2) = 12$

6. **Respuesta d.**

$\overline{abc} = \overset{\circ}{12}$
$\overline{a12} = \overset{\circ}{12}$

Suma de los números = ¿?

Si conocemos el $\overset{\circ}{12}$, es $\overset{\circ}{3}$ y $\overset{\circ}{4}$

Entonces, $\overline{a12}$ es múltiplo de 4, y sus dos últimas cifras (12) son $\overset{\circ}{4}$.

Calculamos los valores de *a* para que $\overline{a12}$ sea $\overset{\circ}{3}$:
$a + 1 + 2 = \overset{\circ}{3}$
$a = 3$
$a = 6$
$a = 9$

Obtenemos tres números:
$\overline{a12} = 312$
$\overline{a12} = 612$
$\overline{a12} = 912$

Al sumarlos:
312 + 612 + 912 = **1836**

7. **Respuesta d.**

Marzo: 4 martes y 4 sábados

MARZO						
D	L	M	K	J	V	S
			ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ
ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ
ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ
ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ
ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ	ꝏ	

Marzo 31 fue viernes, entonces:

A	M	J	J	A	S	Total días
30	31	30	31	31	23	176

Las semanas transcurridas son:
$176 = \overset{\circ}{7} + 1$
$176 = 175 + 1$

Obtenemos el día que corresponde al 23 de setiembre:
Viernes + 1 día, es decir: “sábado”

8. **Respuesta d.**

Total: 250

$$V \begin{cases} \text{Abogados} : \overset{\circ}{5} \\ \text{Médicos}: \overset{\circ}{6} \\ \text{Ingenieros} : \overset{\circ}{7} \end{cases}$$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos

$V = \overline{MCM(5,6,7)}$

$V = \overset{\circ}{210} = 210$

$\therefore M = 40$

9. **Respuesta c.**

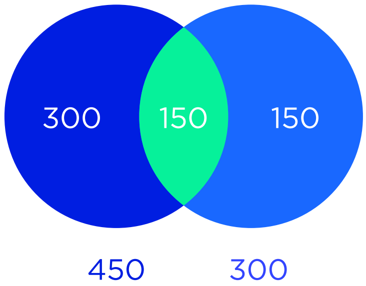
Al descomponer:
$36 = 2^2 \,.\, 3^2$

Total de números con tres cifras: 900

La cantidad de números:
$\overset{\circ}{2}$ de 3 cifras: 450
$\overset{\circ}{3}$ de 3 cifras: 300

Para obtener los PESI de 36, calculamos los que tienen divisores comunes como 2, 3 y 6.

Calculamos los enteros múltiplos de 3:
$100 < 3K < 999$
$33{,}3 \leq K \leq 333$
$\overset{\circ}{3} = 333 - 34 + 1$
Calculamos los enteros múltiplos de 6:
$100 \leq 6K \leq 999$
$16{,}\ldots \leq K \leq 166{,}\ldots$
$17 \leq K \leq 166$
$\overset{\circ}{6} = 166 - 17 + 1 = 150$
Esquematizamos los numerales de tres cifras:



Obtenemos los PESI de 36:
900 – 600 = **300**

10. **Respuesta d.**

Ahorra: S/ 30 diarios
María: gasta S/ 7 $\longrightarrow$ ahorra S/ 23
Rosa: gasta S/ 87 $\longrightarrow$ ahorra S/ 22
Ahorro final: S/ 223
x : número de días que sale con María.
y : número de días que sale con Rosa.
Días transcurridos: $x + y$
Formamos la ecuación diofántica:

$$\overbrace{23x}^{S/7} + \overbrace{22y}^{S/8} = 223$$

(más días)

$$\text{Si } x = 1 \longrightarrow y = \frac{200}{22}$$

$x = 3 \qquad y = 7$

Al reemplazar los valores, se cumple:
$23(3) + 22(7) = 223_{\#}$
Calculamos los días transcurridos:
$x + y = 3 + 7 = 10$

11. Respuesta c.

Edad Andrea: $\overline{ab} < 70$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos

$$\overline{ab} \begin{cases} \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{5} \\ \overset{\circ}{9} \end{cases}$$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos

$\overline{ab} = \overline{MCM(\overset{\circ}{3,5,9})}$

$\overline{ab} = \overset{\circ}{45}$

El $\overset{\circ}{45}$ menor a 70:

$45 < 70$

Calculamos la diferencia entre el mayor y menor dígito:

$5 - 4 = 1$

12. Respuesta a.

Solución 1:

Sabemos que los ceros se generan de: $2 \times 5 = 10$

$\longrightarrow 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times ... \times 50$

De 50 números, hay mayor cantidad de $\overset{\circ}{2}$, entonces:

Calculamos los $\overset{\circ}{5}$:

5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	5.5.2
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
1	2	3	4	6	7	8	9	10	12

Entonces hay doce, productos donde se obtiene 10.

$\therefore$ *El producto tiene* 12 *ceros*

Solución 2: Método de divisiones sucesivas para calcular el número de ceros en el factorial de un n°

$$\begin{array}{l|l} N & 5 \\ \hline & q \;\; \begin{array}{|l} 5 \\ \hline P \end{array} \end{array} \qquad \# \, ceros = p + q$$

En el producto de los 50 primeros números:

$$\begin{array}{l|l} 50 & 5 \\ \hline - & 10 \;\; \begin{array}{|l} 5 \\ \hline 2 \end{array} \\ & - \end{array} \qquad \# \, ceros = 10 + 2 = 12$$

13. Respuesta b.

N: menor número, entero positivo
Obtenemos de N con el máximo residuo:

$$N \begin{cases} \overset{\circ}{7} + 6 \longrightarrow \overset{\circ}{7} - 1 \\ \overset{\circ}{6} + 5 \longrightarrow \overset{\circ}{6} - 1 \\ \overset{\circ}{5} + 4 \longrightarrow \overset{\circ}{5} - 1 \\ \overset{\circ}{3} + 2 \longrightarrow \overset{\circ}{3} - 1 \end{cases}$$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos:
$MCM(3,5,6,7) = 210$

Obtenemos que el menor número N es:
$N = \overset{\circ}{210} - 1 = 210-1=209$

14. Respuesta d.

Al descomponer canónicamente $21^n .35^n$ obtenemos:
$21^n .35^n = 7^n . 3^n .5^n .7^n = 7^{2n} . 3^n . 5^n$

Calculamos n, si la cantidad de divisores es 225:
$CD = (2n + 1)(n + 1)^2 = 225$

Si el factor $(n + 1)^2$ es cuadrado perfecto, es decir, veinticinco, entonces:
$(n + 1)^2 = 25$
$n = 4$

Comprobamos:
$(2n + 1)(n + 1)^2 = 225$
$[2(4) + 1](4 + 1)^2= 225$
$9(25) = 225$
$\therefore n = 4$

Calculamos los divisores propios de:
$\overline{nn}^n = 44^4= 2^8 . 11^4$
$CD = (8 + 1)(4 + 1) = 45$

NOTA:
Los divisores propios son todos los divisores excepto él mismo. Entonces la cantidad de divisores propios de $\overline{nn}^n$ es 45 – 1 = 44.

15. Respuesta c.

$A = 2^4 \times 3^6 \times 5^3$

Descomponemos en múltiplo de 12:

$A = 2^4 \times 3^6 \times 5^3 = 2^2 \times 3\,(2^2 \times 3^5 \times 5^3)$

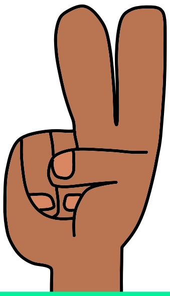
$A = \overset{\circ}{12}\,(2^2 \times 3^5 \times 5^3)$

Calculamos la cantidad de divisores múltiplos de 12:

$CD = (2 + 1)(5 + 1)(3 + 1)$

$CD = 72$

Por lo tanto, la cantidad de divisores múltiplos de $\overset{\circ}{12}$ es 72.



¡Sigamos aprendiendo... La Pre!