



Números y Operaciones IV (MCM - MCD)

Actividad

Resolvemos retos o situaciones que involucren la aplicación del MCM y MCD.

¡Hola! Gracias por conectarte y ser parte de La Pre.

¿Qué es el MCM y el MCD?

Máximo común divisor (MCD):

Se llama MCD de un conjunto de dos o más números enteros positivos al entero que cumple dos condiciones:

- Ser divisor común de todos
- Ser el mayor posible

Mínimo común múltiplo (MCM)

Se llama MCM de un conjunto de dos o más números enteros positivos al entero que cumple dos condiciones:

- Ser múltiplo de todos
- Ser el menor posible.

Algunas propiedades

- Si A y B son PESI, entonces:
 $MCD(A, B) = 1$
 $MCM(A, B) = A \cdot B$
- El producto de dos enteros positivos siempre es igual al producto de su MCD y MCM.
 $A \cdot B = MCD(A, B) \cdot MCM(A, B)$
- Sean $\{A = ak \ B = bk ; \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son PESI}\}$
 $\longrightarrow \{MCD(A, B) = k \ MCM(A, B) = a \cdot b \cdot k\}$

Números PESI:

Llamados también **coprimos** o **primos entre sí**, son aquellos que al compararse poseen como único divisor a la unidad.

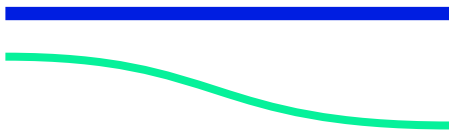
Estrategias de solución para número de cortes, postes, estacas, etc.

1. En circuitos cerrados



$$\# \frac{\text{objetos}}{\text{cortes}} = \frac{\text{contorno}}{\text{distancia entre cada objeto/corte}}$$

2. En circuitos abiertos



$$\# \text{objetos} = \frac{\text{total}}{\text{distancia}} + 1$$

Retos



1. Se desea llenar tres cilindros cuyas capacidades son 120 L, 210 L y 150L, respectivamente. Los cilindros serán llenados con agua empleando un balde cuya capacidad está comprendida entre los 4 L y 12 L. Si siempre se transferirá la máxima cantidad posible de agua del balde a cada cilindro, y cada cilindro será llenado de forma exacta sin que, sobre agua, ¿cuál debe ser la capacidad del balde?
 - a) 5 L
 - b) 6 L
 - c) 8 L
 - d) 10 L
2. Halle $A + B$ si se cumple lo siguiente:
 $MCD(A; B) = 8$
 $AB = 448$
 - a) 50
 - b) 64
 - c) 56
 - d) 120
3. Una empresa de instalaciones eléctricas ha sido contratada para iluminar un ambiente donde se llevará a cabo la graduación de los alumnos de un colegio. Se usarán 6 juegos de luces que estarán conectados al mismo tiempo. El primero se encenderá cada 3 segundos; el segundo, cada 6 segundos; el tercero, cada 12 segundos; el cuarto, cada 15 segundos; el quinto, cada 18 segundos; y el último, cada 30 segundos. ¿Cada cuántos minutos se encenderán los seis juegos de luces simultáneamente?
 - a) 2 minutos
 - b) 1,5 minutos
 - c) 3 minutos
 - d) 5 minutos
4. Se desean almacenar 780 botellas de gaseosa y 1220 botellas de vinagre en cierto número de cajas que contengan el mismo número de botellas, sin mezclar botellas de diferente tipo y sin que sobre ninguna. ¿Cuál es el menor número de cajas que se requiere?
 - a) 20
 - b) 80
 - c) 100
 - d) 60
5. El número de alumnos de un aula es tal que, si se agrupan de 12 en 12, sobran 10; y si se agrupan de 10 en 10, sobran 8. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
 - I. Si se agrupan de 15 en 15, sobran 13.
 - II. Si se agrupan 2 alumnos, el nuevo total es múltiplo de 60.
 - a) Solo I
 - b) Solo II
 - c) I y II
 - d) Ninguna

6. Un número es dividido entre 8, 12 y 16, y los residuos obtenidos son 5, 9 y 13, respectivamente. Halla dicho número si es el menor posible.

a) 93
b) 48
c) 43
d) 45

7. Un comerciante compró carne al por mayor y al mismo precio en tres tiendas distintas. En cada caso pagó \$ 280, \$ 448 y \$ 350, y siempre compró un número exacto de kilogramos. Si el precio por kilogramo fue el mayor posible, ¿cuánto pagó por kilogramo?

a) \$12
b) \$13
c) \$14
d) \$15

8. Un terreno rectangular mide 24 m x 42 m y se desea colocar árboles en todo su contorno plantando un árbol en cada vértice y manteniendo igual separación entre dos árboles consecutivos, de manera que dicha separación sea la mayor posible. ¿Cuántos árboles se deben plantar?

a) 18
b) 20
c) 22
d) 24

Tomado del Ceprepuc 2019.9

9. Se quiere repartir el aceite de tres barriles que contienen 210, 300 y 420 litros de aceite en envases con la misma capacidad. ¿Cuál es la menor cantidad de envases que se tendrían que emplear para que todos estén llenos, que no quede aceite sin repartir y que en cada envase haya

aceite proveniente solo de uno de los tres barriles?

a) 31
b) 32
c) 33
d) 34

Tomado del Ceprepuc 2019.9

10. Tres hermanos, Juan, Julio y Jairo, visitan a su abuelita cada 5; 10 y 15 días; respectivamente. Se sabe que los tres hermanos coincidieron en visitar a su abuelita el 3 de julio. Luego, de esa fecha, ¿en qué fecha coincidieron en la visita por tercera vez?

a) 1 de septiembre
b) 31 de agosto
c) 30 de agosto
d) 2 de septiembre

Tomado del Ceprepuc 2019.9

11. Un carpintero ha fabricado un lote de sillas. Si las cuenta por docenas y de 15 en 15, siempre sobran 7. ¿Cuántas sillas fabricó si dicho número está comprendido entre 100 y 180?

a) 157
b) 167
c) 177
d) 127

Tomado del Ceprepuc 2019.9

12. Un comerciante ha comprado una cantidad de papayas para vender. Para conservarlas, las debe guardar en cajas de cartón, pero al momento de guardarlas observa que le sobran algunas. Si las guarda de 12 en 12, sobran 8; si las guarda de 15 en 15, sobran 11; y si las guarda de 18 en 18, sobran 14. ¿Cuántas papayas ha comprado si este número es el menor posible?

- a) 180
- b) 176
- c) 220
- d) 164

Tomado del Ceprepuc 2019.9

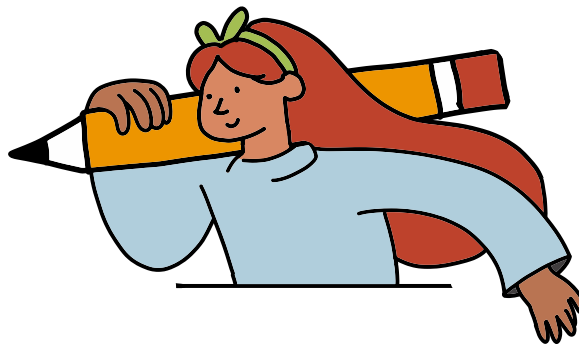
- 13.** Claudia cuenta las carteras que tiene y descubre que, si cuenta de cuatro en cuatro, le sobran tres y, si cuenta de siete en siete, le sobran seis. Halla la cantidad de carteras que tiene Claudia si se sabe que tiene más de 150 y menos de 180. Da como respuesta la suma de las cifras de esta cantidad.
- a) 14
 - b) 15
 - c) 16
 - d) 17

Tomado del Ceprepuc 2019.9

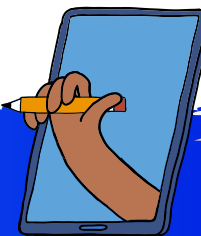
- 14.** Las longitudes de tres barras de acero son 875 cm, 1875 cm y 5025 cm. Cada una de estas barras será dividida en barras más pequeñas sin que sobre material y de modo que la longitud de todas las barras obtenidas sea la misma y sea la mayor posible. ¿Cuántos cortes se tendrán que realizar?

- a) 311
- b) 308
- c) 305
- d) 25

- 15.** En un almacén hay un lote de lápices. Si se empaquetan en grupos de 6, sobran 4; en grupos de 7, sobran 5; y en grupos de 9, sobran 7. Determina cuántos lápices tiene el lote si esta cantidad es la menor posible.
- a) 126
 - b) 125
 - c) 124
 - d) 123



Resolvemos los retos



1. Respuesta d.

Capacidad de 3 cilindros: 120, 210, 150

Capacidad del balde: entre 4 L y 12 L

Máxima capacidad de balde: x

$$4 < x < 12$$

$$\begin{array}{r|l} 120 - 210 - 150 & 2 \\ 60 - 105 - 75 & 3 \\ 20 - 35 - 25 & 5 \\ 4 - 7 - 5 & \end{array}$$

$$\text{MCD} = 30$$

De acuerdo con la condición...

$$4 \not< 30 \not< 12$$

$$D_{30} = \{1^2, 3, 5^2, 10, 15, 30\}$$

Obtenemos la máxima capacidad del balde.

La máxima capacidad del balde es 10 L.

2. Respuesta b.

$$\text{MCD}(A; B) = 8$$

$$AB = 448$$

$$A + B = \text{¿?}$$

Calculamos el MCM de A y B, aplicamos la propiedad del producto del MCM por el MCD:

$$\text{MCM}(A, B) \times \text{MCD}(A, B) = A \times B$$

$$\text{MCM}(A, B) = \frac{448}{8}$$

$$\text{MCM}(A, B) = 56$$

Si $\text{MCD} = 8$ y $\text{MCM} = 56$, calculamos A y B.

Aplicamos propiedad:

Sea $A = ak$ y $B = bk$; donde $\text{MCD}(A, B) = k = 8$

$$\text{MCM}(A, B) = ab\text{MCD}(A, B)$$

$$56 = ab(8)$$

$$ab = 7$$

Entonces:

$$a = 1$$

$$b = 7$$

$$\text{Entonces, } A = ak = 1(8) = 8$$

$$B = bk = 7(8) = 56$$

$$A + B = 64$$

3. Respuesta c.

Calculamos el menor múltiplo común al periodo de tiempo de todas las luces:

$$\begin{array}{r|l} 3 - 6 - 12 - 15 - 18 - 30 & 2 \\ 3 - 3 - 6 - 15 - 9 - 15 & 2 \\ 3 - 3 - 3 - 15 - 9 - 15 & 3 \\ 1 - 1 - 1 - 5 - 3 - 5 & 3 \\ 1 - 1 - 1 - 5 - 1 - 5 & 5 \\ 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 & \end{array}$$

$$\text{MCM} = 180$$

Calculamos en cuántos minutos se encienden las luces simultáneamente:

$$\frac{180}{60} = 3$$

Por lo tanto, se encienden simultáneamente cada 3 minutos.

4. Respuesta c.

Para obtener el menor número de cajas, el número de botellas en cada caja debería ser el máximo posible.

MCD (780 - 1220)

$$\begin{array}{r|l} 780 - 1220 & 2 \\ 390 - 610 & 2 \\ 195 - 305 & 5 \\ 39 - 61 & \end{array}$$

Máximo número de botellas = MCD = 20

Número de cajas: $39 + 61 = 100$

5. Respuesta c.

N: número de alumnos

$$N \{ 12 \text{ en } 12 \rightarrow \text{sobran } 10 \rightarrow N = 12 + 10 = 12 - 2 \quad 10 \text{ en } 10 \rightarrow \text{sobran } 8 \rightarrow N = 10 + 8 = 10 - 2$$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos:

$$\text{MCM} (12 - 10) = 60$$

$$\rightarrow N = 60 - 2$$

Analizamos las afirmaciones:

$$\text{I. } 60 - 2 = 58 : 15 \rightarrow R = 13$$
$$\rightarrow 120 - 2 = 118 : 15 \rightarrow R = 13 \quad (\text{V})$$

$$\text{II. } 60 - 2 + 2 = 60 \quad (\text{V})$$

6. Respuesta d.

Para tener el mismo resto, restamos el menor múltiplo:

$$N \{ \begin{array}{l} 8 + 5 = 8 - 3 \\ 12 + 9 = 12 - 3 \\ 16 + 13 = 16 - 3 \end{array}$$

Calculamos el MCM:

$$\begin{array}{r|l} 8 - 12 - 16 & 2 \\ 4 - 6 - 8 & 2 \\ 2 - 3 - 4 & 2 \\ 1 - 3 - 2 & 2 \\ 1 - 3 - 1 & 3 \\ 1 - 1 - 1 & \end{array}$$

$$\text{MCM}(8, 12, 16) = 48$$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos:

$$N = 48 - 3$$

Hallamos el menor número posible:

$$N = 48 - 3 = 45$$

7. Respuesta d.

Calculamos el mayor precio posible en las tres tiendas:

$$\begin{array}{r|l} 280 - 448 - 350 & 2 \\ 140 - 224 - 175 & 7 \\ 20 - 32 - 25 & \end{array}$$

$$\text{MCD}(280, 448, 350) = 14$$

Entonces, el mayor precio posible por kilogramo es de \$ 14.

8. Respuesta c.



Calculamos la mayor distancia:

$$\text{MCD}(42; 24)$$

$$\begin{array}{r|l} 42 - 24 & 2 \\ 21 - 12 & 3 \\ 7 - 4 & \end{array}$$

MCD (42, 24) = 6 m ← mayor distancia entre árboles

Calculamos el contorno del terreno:

$$P = 42(2) + 24(2)$$

$$P = 132$$

Calculamos el número de postes:

$$\frac{p}{d} = \frac{132}{6} = 22$$

9. Respuesta a.

Para obtener la menor cantidad de envases, este debe tener la mayor capacidad posible, además de ser divisor de 210, 300 y 420.

Calculamos la capacidad del envase:

MCD (210, 300, 420)

$$\begin{array}{r|l} 210 - 300 - 420 & 10 \\ 21 - 30 - 42 & 3 \\ 7 - 10 - 14 & \end{array}$$

Capacidad 30 L.

Obtenemos la cantidad de envases:

$$7 + 10 + 14 = 31$$

10. Respuesta a.

Visita 1: 3 de julio

Calculamos el menor múltiplo común de los periodos de visita:

MCM (5; 10 ; 15)

$$\begin{array}{r|l} 5 - 10 - 15 & 5 \\ 1 - 2 - 3 & 2 \\ 1 - 1 - 3 & 3 \\ 1 - 1 - 1 & \end{array}$$

Cada 30 días coincidirán.

De acuerdo con el calendario, obtenemos la fecha que coincidirán después de 60 días, en la visita 3:

Visita 1	Visita 2	Visita 3
3 de Julio	2 de Agosto	1 de setiembre

11. Respuesta c.

Número de sillas $\{12 + 7 \ 15 + 7\}$

Si $100 < N < 180$

Calculamos el múltiplo común a ambas:

$$\text{MCM}(12, 15) = 60$$

$$60 = \{60, 120, 180\}$$

$$100 < 120 < 180$$

$$120 + 7 = 127$$

12. Respuesta b.

Obtenemos el mismo faltante restando los múltiplos de 12, 15 y 18:

$$\text{Número de papayas } \{12 + 8 - 12 = 12 - 4 \ 15 + 11 - 15 = 15 - 4 \ 18 + 14 - 18 = 18 - 4\}$$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos:

$$\text{MCM}(12, 15, 18) = 180$$

$$\text{Número de papayas} = 180 - 4$$

Obtenemos el menor número de papayas que sea múltiplo de 180

$$\text{Número de papayas} = 180 - 4 = 176$$

13. Respuesta b.

Cantidad de carteras: N

$$150 < N < 180$$

Si contamos de 4 en 4 y de 7 en 7, obtenemos el mismo faltante:

$$N \{4 + 3 - 4 = 4 - 1 \ 7 + 6 - 7 = 7 - 1\}$$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos:

$$\text{MCM}(4, 28) = 28$$

$$N = 28 - 1$$

$$28 = \{28; \dots; 140; 168; \dots\}$$

Obtenemos la menor cantidad de carteras que sea múltiplo de 28:

$$150 < N < 180$$

$$150 < 168 < 180$$

Calculamos la suma de las cifras de la cantidad de carteras:

$$1 + 6 + 8 = 15$$

14. Respuesta b.

Obtenemos la mayor longitud de todas las barras:

MCD (875, 1875, 2025)

$$\begin{array}{l|l} 875 - 1875 - 2025 & 25 \\ 35 - 75 - 201 & \end{array}$$

Cada barra tendrá una mayor longitud de 25 m.

Calculamos el total número de barras:

$$35 + 75 + 201 = 311$$

Pero en cada barra, por ser circuito lineal, se obtiene una barra más que el número de cortes, por lo tanto, restamos tres cortes:

$$311 - 3 = 308$$

Es decir, se realizan 308 cortes.

15. Respuesta c.

Lote de lápices: N

Si se empaquetan:

$$N \{ \overset{\circ}{6} + 4 \overset{\circ}{7} + 5 \overset{\circ}{9} + 7 \}$$

Sumamos el menor múltiplo para obtener el mismo faltante:

$$N \{ \overset{\circ}{6} + 4 - 6 = \overset{\circ}{6} - 2 \overset{\circ}{7} + 5 - 7 = \overset{\circ}{7} - 2 \overset{\circ}{9} + 7 - 9 = \overset{\circ}{9} - 2 \}$$

Aplicamos la propiedad de los múltiplos:

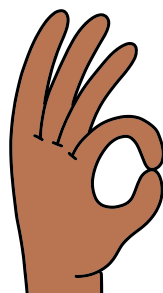
$$\text{MCM}(6, 7, 9) = 126$$

$$N = 126 - 2$$

Obtenemos la menor cantidad de lápices que tiene el lote:

$$N = 126 - 2 = 124$$

Por lo tanto, el lote tiene 124 lápices.



¡Sigamos aprendiendo... La Pre!