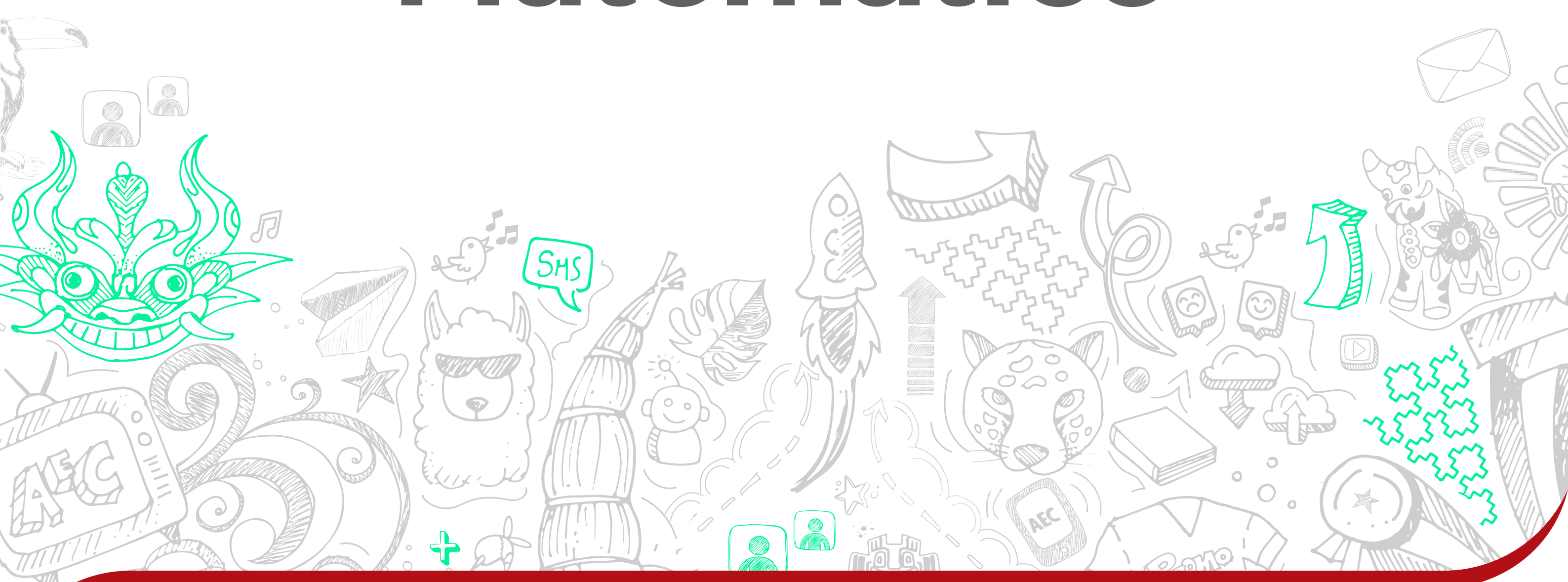
La Pre

APRENDO EN CASA

Promo 2020
SOMOS IMPARABLES

Razonamiento Matemático



mejor educación mejores peruan@s

PERÚ Ministerio de Educación

Funciones cuadráticas

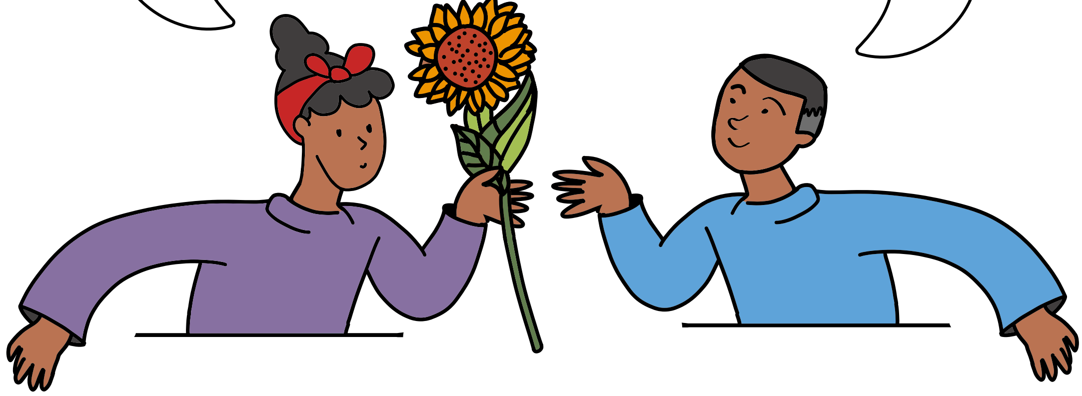
Actividad

Aplicamos nuestros conocimientos de funciones cuadráticas para resolver problemas en la vida cotidiana.

¡Hola! Gracias por conectarte y ser parte de La Pre.

Joaquín, ya me decidí: voy a estudiar Ingeniería. Por ello, estaba viendo muchas obras de edificaciones, monumentos, parques, etc., y me llamó mucho la atención, entre otras cosas, por ejemplo, que en Tacna hay un arco muy significativo en homenaje a los héroes de la guerra del Pacífico que tiene forma parabólica.

Sí, en las construcciones se hace mucho uso de las matemáticas, para realizar cálculos y para analizar ciertas representaciones de la vida real que tienen formas particulares, a través de las funciones. Para construir ese arco tuvieron que hacer uso de funciones cuadráticas, cuya forma general es f(x) = ax2 + bx + c, y su representación gráfica es una parábola. Este concepto tiene muchas aplicaciones.



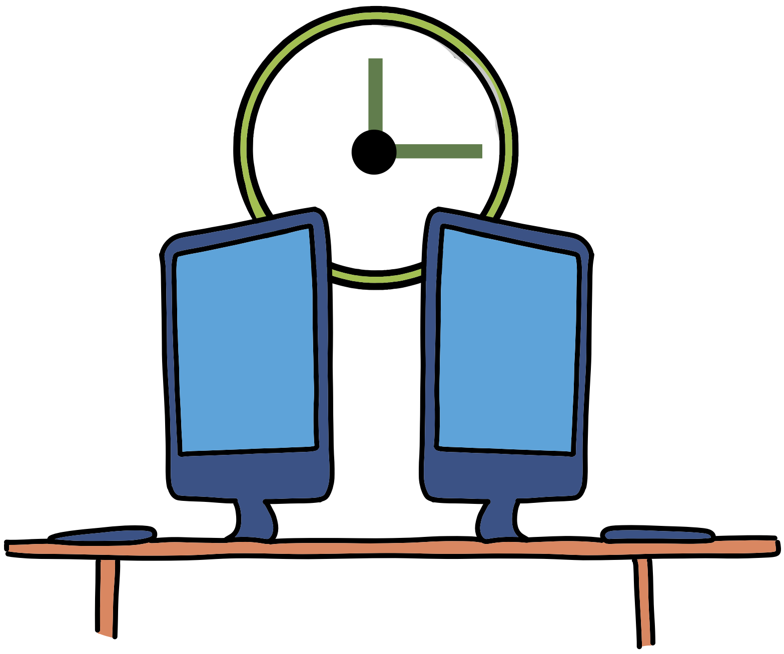
Funciones cuadráticas

Forma general de la función cuadrática:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde **a**, **b** y **c** son constantes, con **a** diferente de cero.

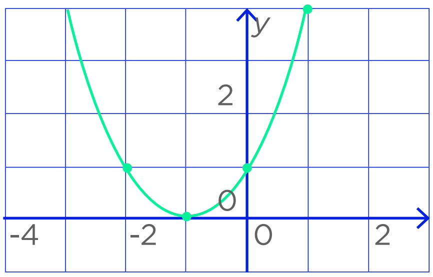
La gráfica de una función cuadrática es una parábola con eje vertical, cuya dirección de la abertura depende del valor de **a**: si es positivo, se abre hacia arriba, y si es negativo, se abre hacia abajo.



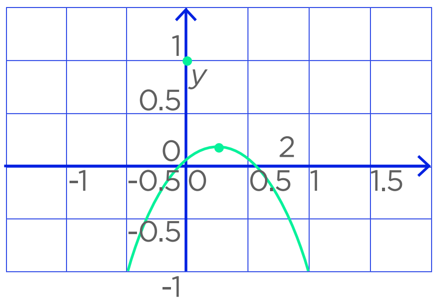
Retos

1. ¿Cuántas de las siguientes gráficas no representan una función cuadrática?

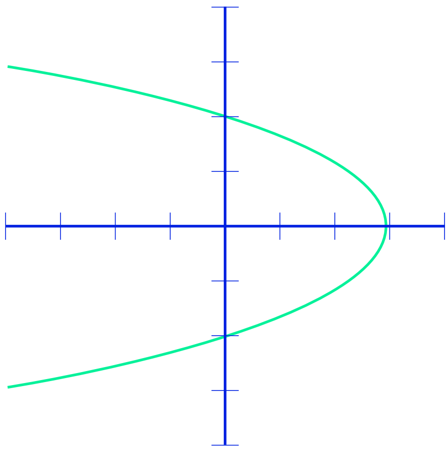
a)



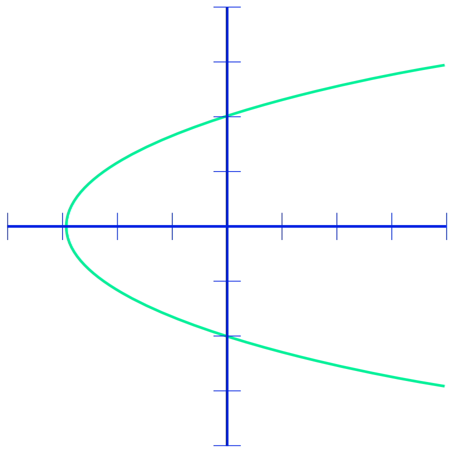
b)



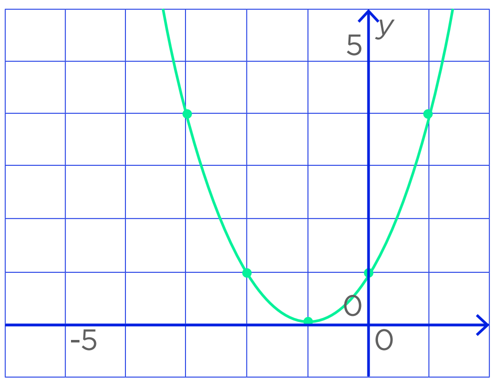
c)



d)



e)



a) 1
b) 2
c) 5
d) 3
e) 4

2. Dada la función $f(x) = 3x^2 - 1$, calcula el valor numérico de:

$$M = \frac{4[f(1) + f(-2)]}{f(f(0))}$$

a) 52/11
b) 13
c) 26
d) 20
e) 64/11

3. Dada la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 10$, calcular el vértice de la parábola y el intercepto de su representación gráfica con el eje "y".

a) V (2; –2) y (0; –10)
b) V (–2; 2) y (–10; 0)
c) V (0; 4) y (0; 10)
d) V (0; –4) y (0; –10)
e) V (–2; –2) y (0; –10)

4. Determinar el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:

- Si $g(x) = 2x^2/3$, entonces $g(3) = 6$. ( )
- La función $h(x) = 1/x^2$ no es una función cuadrática. ( )
- La gráfica de una función cuadrática es una parábola. ( )

a) VFV
b) VFF
c) FFF
d) VVF
e) VVV

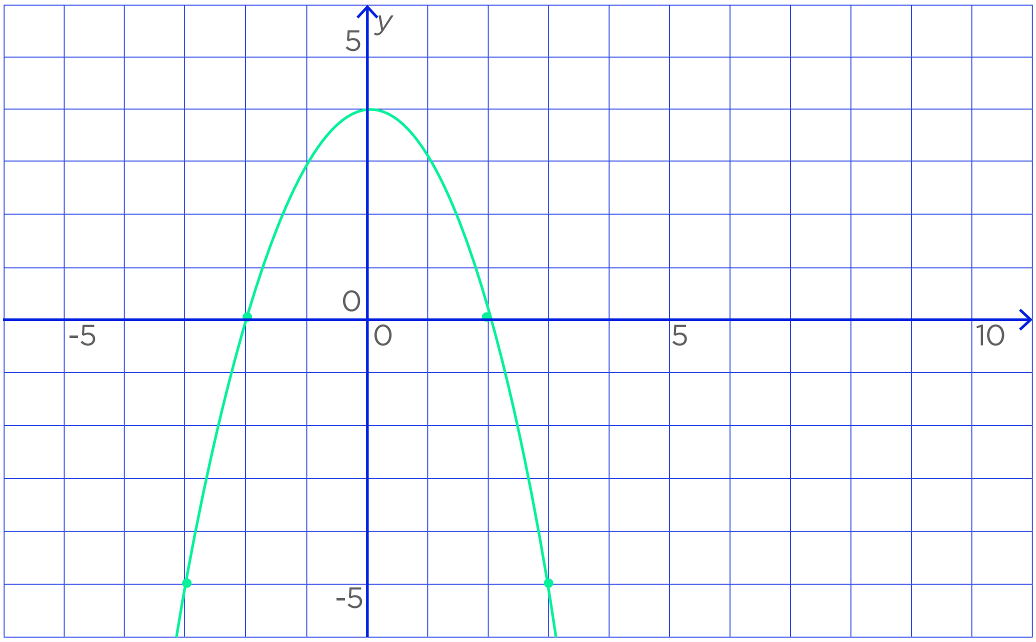
5. Si la función tiene como ecuación $f(x) = x^2 - 4x + 4$, calcular $R = f(8)/9 - f(9)/7 + f(7)/5$

a) 8
b) -8
c) 2
d) -2
e) 4

6. La ganancia de una empresa está dada por la siguiente fórmula:
$f(x) = -x^2 + 100x$. Si x representa la cantidad de productos vendidos, ¿cuál es la cantidad de productos vendidos que les generó la máxima ganancia?

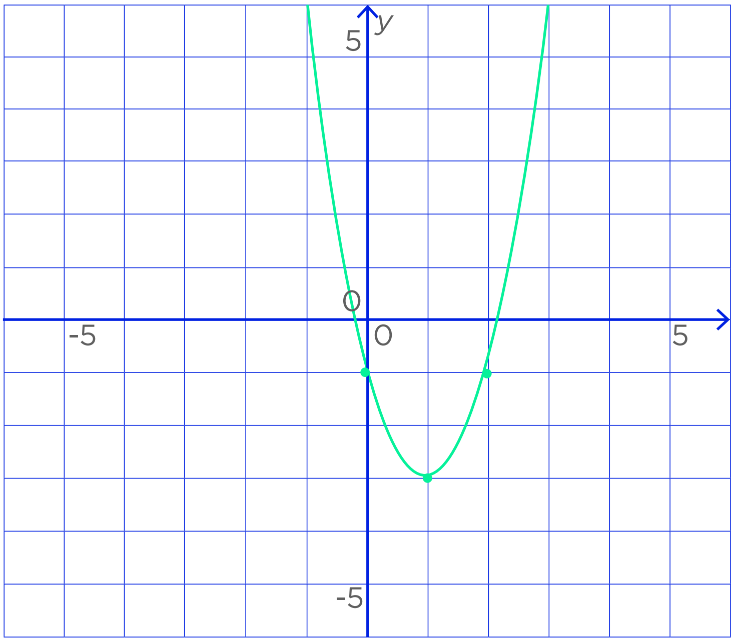
a) 50
b) 40
c) 60
d) 45
e) 55

7. Dado el siguiente gráfico, determina la ecuación de la función cuadrática



a) V (2; –2) y (0; –10)
b) V (–2; 2) y (–10; 0)
c) V (0; 4) y (0; 10)
d) V (0; –4) y (0; –10)
e) V (–2; –2) y (0; –10)

8. Observa la representación gráfica de la función y determina el dominio y el rango.



a) $D(f) = R$ y $R(f) = [-3; \infty>$

b) $D(f) = [-1; 3]$ y $R(f) = [-3; \infty>$

c) $D(f) = R$ y $R(f) = <-3; \infty>$

d) $D(f) = R$ y $R(f) =]-3; \infty>$

e) $D(f) = [-3; \infty\ [$ y $R(f) = R$

9. Para almacenar la mayor cantidad de residuos sólidos, se desea construir un contenedor rectangular de 0,8 m de altura; para ello, el área de la base tiene que ser la máxima posible, si el perímetro debe ser de 8 m. Calcular las dimensiones de la base del contenedor.

a) 3 m y 3 m

b) 4 m y 4 m

c) 2 m y 2 m

d) 1 m y 2 m

e) 2 m y 3 m

10. La función $f(x) = 3x(x + 2)$ representa el área de un rectángulo. Calcular sus dimensiones si al duplicar su área resulta 210 m^2.

a) 7 m y 5 m

b) 14 m y 10 m

c) 15 m y 7 m

d) 35 m y 9 m

e) 21 m y 9 m

11. Si la función tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + 2$, además, se sabe que $f(-2) = 28$ y $f(3) = 38$, escribe la ecuación de la función.

a) $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$

b) $f(x) = -5x^2 + 3x + 2$

c) $f(x) = -5x^2 - 3x + 2$

d) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

e) $f(x) = -x^2 - 3x + 2$

12. La función de la rentabilidad de una empresa en dólares está dada por la siguiente ecuación: $f(x) = 1000 + 20x - x^2$. Calcular el máximo nivel de ganancia.

a) 1200

b) 1000

c) 1300

d) 900

e) 1100

13. Determinar el rango de la función $f(x) = -x^2 + 3x +1$, si $x \in [-2; 1]$.

a) $R(f) = [-9; \infty[$

b) $R(f) = [-9; 3]$

c) $R(f) = [-9; -3]$

d) $R(f) = R$

e) $R(f) = [-9; 3{,}5[$

14. ¿Cuál es la producción necesaria para que una fábrica alcance el costo máximo en la producción de x artículos, si dicho costo está dado por la función $C(x) = 60x - x^2 + 700$?

a) 40

b) 60

c) 30

d) 1700

e) 1600

15. Un nadador se lanza al agua y describe una trayectoria parabólica hasta que emerge del agua a una determinada distancia. Si dicha trayectoria está dada por la función $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$, ¿cuál es la máxima profundidad alcanzada?

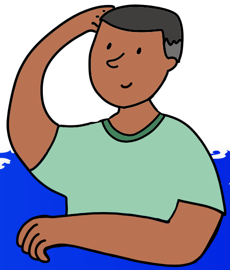
a) 2,5 m

b) 3,5 m

c) 5,5 m

d) 4,5 m

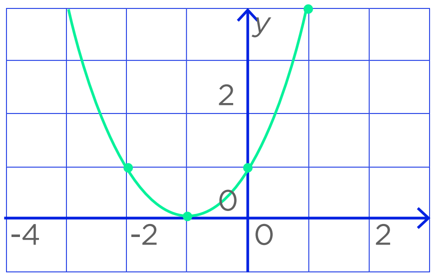
e) 5,3 m



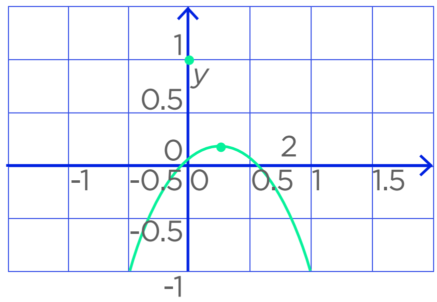
Resolvemos los retos

1. **Respuesta b.**

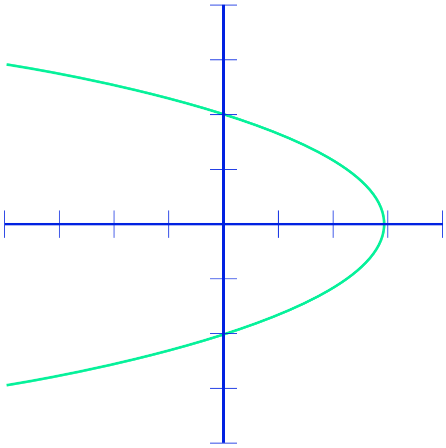
a)



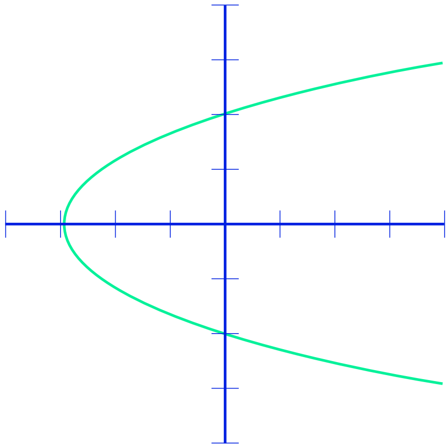
b)



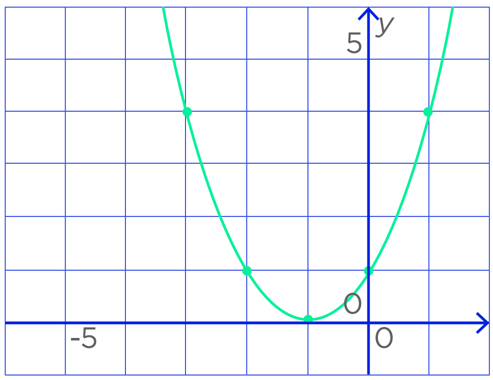
c)



d)



e)



2. **Respuesta c.**

Para calcular el valor numérico de M, trabajamos en forma separada cada función y luego reemplazamos.

$f(1) = 3(1)^2 - 1 = 2$

$f(-2) = 3(-2)^2 - 1 = 11$

$f(0) = 3(0)^2 - 1 = -1$

$f(-1) = 3(-1)^2 - 1 = 2$

$M = 4[2 + 11]/2 = 4(13)/2 = 26$

3. **Respuesta a.**

Para calcular el vértice V (h; k) de la función, podemos aplicar la fórmula para hallar h, que es $h = -b/2a$.

En la ecuación de la función determinamos los valores de a, b y c:

a = -2

b = 8

c = -10

Entonces:

$h = -8/2(-2) = 2$

Luego reemplazamos en la función para hallar el valor de k:

$k = -2(2)^2 + 8(2) - 10 = -8 + 16 - 10 = -2$

Por lo tanto, el V (2;-2).

Hallamos el intercepto con y reemplazando x = 0 en la función:

$y = f(x) = -2(0)^2 + 8(0) - 10 = -10$

La coordenada será (0; –10).

4. **Respuesta b.**

I) Al reemplazar $x = 3$, $g(3) = 2(3)^2/3 = 2(9)/3 = 6$. (V)

II) No es una función cuadrática porque, cuando x = 1 o –1, la función no es continua. (F)

III) Es una parábola, no es cualquier curva. (F)

5. **Respuesta c.**

Hallamos $f(8)$, $f(9)$ y $f(7)$ y luego los reemplazamos en R.

$$f(8) = (8)^2 - 4(8) + 4 = 64 - 32 + 4 = 36$$

$$f(9) = (9)^2 - 4(9) + 4 = 81 - 36 + 4 = 49$$

$$f(7) = (7)^2 - 4(7) + 4 = 49 - 28 + 4 = 25$$

$$R = \frac{36}{9} - \frac{49}{7} + \frac{25}{5} = 4 - 7 + 5 = 2$$

6. **Respuesta a.**

Para solucionar este problema expresamos la función de la siguiente forma, donde h y k son las coordenadas del vértice de la parábola:

f(x) = a(x -h)2 + k

Completamos cuadrados y lo expresamos de la forma pedida:

f(x) = -x2+ 100x = - (x2 - 100x) = - (x2 - 100x + 2500 - 2500)

f(x) = -[(x2 - 100x + 2500) - 2500]

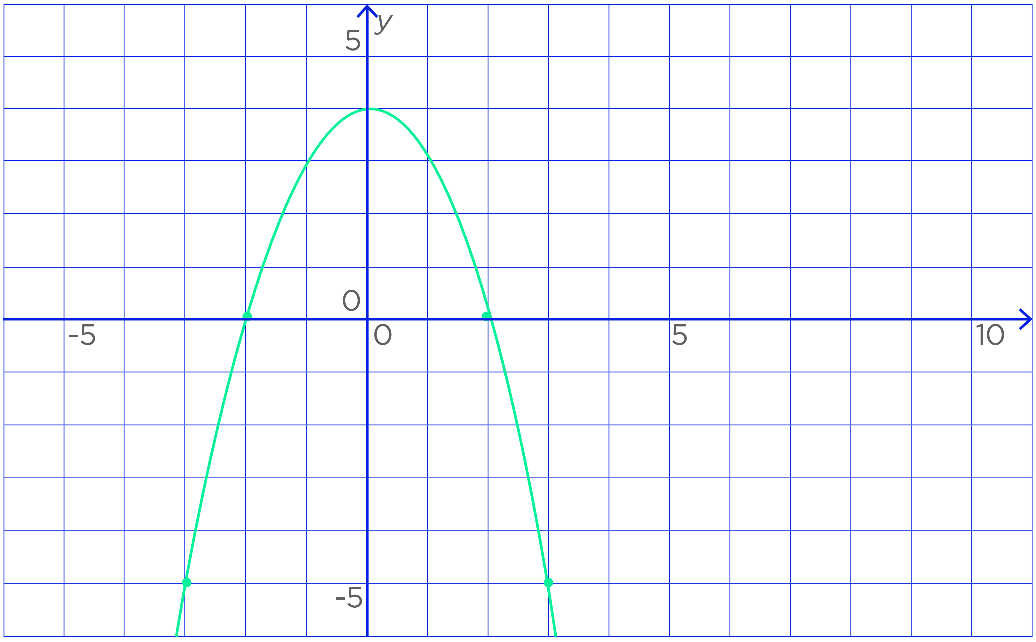
f(x) = -[(x - 50)2 - 2500] = - (x - 50)2 + 2500

Para obtener la máxima ganancia, x tendría que ser 50.

Por lo tanto, la máxima cantidad de productos vendidos es 50.

La Pre
APRENDO EN CASA

7. Respuesta c.



Observamos el gráfico y determinamos el vértice de la parábola y uno de sus puntos: V (0; 4) y el punto (1; 3). Con estos datos podemos encontrar la ecuación de la función.

Reemplazamos h y k:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

$$f(x) = a(x - 0)^2 + 4 = ax^2 + 4$$

Tomamos los valores del punto (1; 3) y reemplazamos para hallar a:

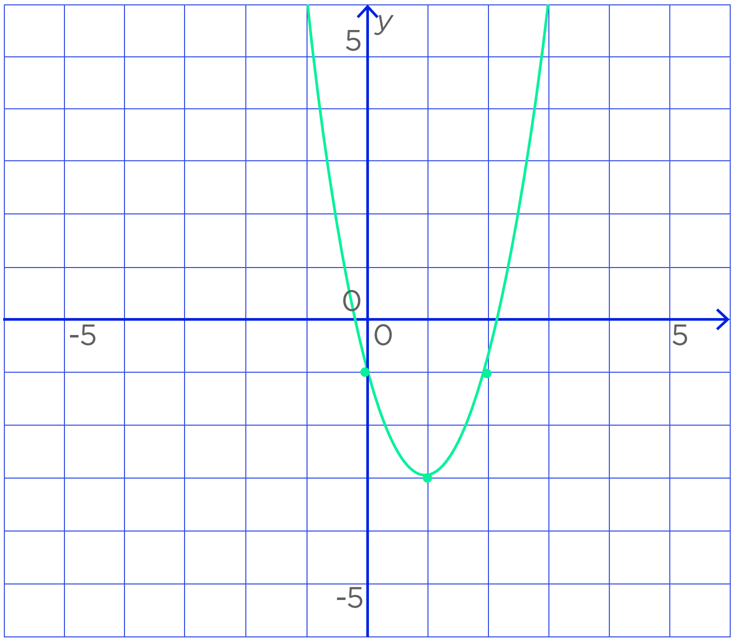
$$\mathbf{3 = a\,(1)^2 + 4}$$

$$3 = a + 4$$

$$a = -1$$

Por lo tanto, la ecuación de la función es $f(x) = -1x^2 + 4 = -x^2 + 4$

8. **Respuesta a.**



Observamos el gráfico y determinamos el vértice, que es el punto más bajo de la parábola: V(1;-3)

El dominio será el conjunto R y el rango serán todos los valores de y mayores e iguales a –3 y se expresarán respectivamente: D(f) = R y R(f) = [-3; ∞>

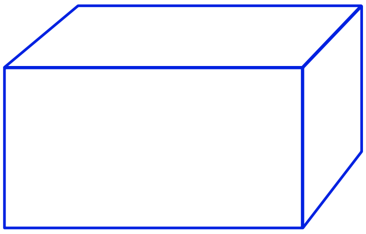
9. **Respuesta c.**

Graficamos el contenedor

P = 2*x* + 2*y* = 8 *m*

x + *y* = 4

y = 4 - *x*



Reemplazamos en la fórmula del área para trabajar todo en función de x:

$$A(x) = (x)(y) = (x)\ (4 - x) = 4x - x^2$$

Transformamos a la forma A(x)= a(x - h)2 + k completando cuadrados:

$$A(x) = -x^2 + 4x$$

$$A(x) = -[\ x^2 - 4x + 4 - 4]$$

$$A(x) = -[\ (x - 2)^2 -4]$$

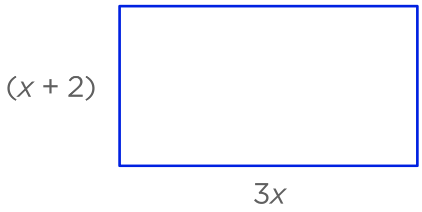
$$A(x) = -(x - 2)^2 + 4$$

Por lo tanto, el valor de x es 2 para que el área sea máxima. También y es 2.

Las dimensiones serán 2 m y 2 m, es decir, es un cuadrado.

10. Respuesta c.

Graficamos el problema



$A = 3x(x + 2)$

Si $2A = 210$, entonces $A = 105\ m^2$

Resolvemos:

$$105 = 3x(x + 2)$$

$$105 = 3x^2 + 6x$$

$3x^2 + 6x - 105 = 0$ (dividimos todo entre 3)

$x^2 + 2x - 35 = 0$ (factorizamos)

$$(x + 7)(x - 5) = 0$$

$$x = -7 \quad \wedge \quad x = 5$$

Las dimensiones son 15 m y 7 m.

11. Respuesta d.

Para solucionar este tipo de problemas hacemoslos reemplazos de x e y sabiendo que $f(x)= y$.

$$f(-2) = a(-2)^2 + b(-2) + 2 = 28$$

$$28 = 4a - 2b + 2$$

$$26 = 4a - 2b \qquad (1)$$

$$f(3) = a(3)2 + b(3) + 2 = 38$$

$$38 = 9a + 3b + 2$$

$$36 = 9a + 3b \qquad (2)$$

Formamos un sistema de ecuaciones con (1) y (2):

$$\begin{cases} 4a - 2b = 26 & (3) \\ 9a + 3b = 36 & (2) \end{cases}$$

Sistema equivalente:

$$\begin{cases} 12a - 6b = 78 \\ 18a + 6b = 72 \end{cases}$$

$$30a = 150$$

$$a = 5$$

Calculando b:

$$4(5) - 2b = 26$$

$$20 - 26 = 2b$$

$$-6/2 = b$$

$$b = -3$$

La ecuación de la función: $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

12. Respuesta e.

Para resolver transformamos la función a la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$:

$$f(x) = -x^2 + 1000 + 20x$$

$$f(x) = -[x^2 - 20x - 1000]$$

$$f(x) = -[x^2 - 20x + 100 - 1000 - 100]$$

$$f(x) = -[(x - 10)^2 - 1100]$$

$$f(x) = -(x - 10)^2 + 1100$$

La ganancia máxima es cuando se venden 10 productos, lo que da el monto de $ 1100.

13. Respuesta b.

Para calcular el rango debemos de hallar el vértice de la parábola y luego relacionarlo con los parámetros de x: V(h; k)

Calculamos *h*:

$h = -b/2a$

$h = -3/2(-1)$

$h = 3/2$

$h = 1{,}5$

Hallamos *k*:

$k = -(1{,}5)2 + 3(1{,}5) + 1$

$k = -2{,}25 + 4{,}5 + 1$

$k = 3{,}25$

Hallamos *k*:

$k = -(1{,}5)2 + 3(1{,}5) + 1$

$k = -2{,}25 + 4{,}5 + 1$

$k = 3{,}25$

Entonces:

V(1,5; 3,25)

Como x^2 es negativo, la parábola se abre hacia abajo; por lo tanto, el vértice es el punto máximo.

Teniendo en cuenta que $x \in [-2; 1]$, reemplazamos en la función $x = -2$:

$y = -(-2)^2 + 3(-2) + 1 = -4 - 6 + 1 = -9$

$y = -(1)^2 + 3(1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$

Por lo tanto, el mínimo valor que puede tomar y es –9, entonces R (f) = [-9; 3].

14. Respuesta c.

Transformamos la ecuación a la forma $f(x) = y = a(x - h)^2 + k$.

$$C(x) = 60x - x^2 + 700 = -x2 + 60x + 700 = -[x^2 - 60x - 700]$$

$$C(x) = -[x^2 - 60x + 900 - 700]$$

$$C(x) = -[(x - 30)^2 - 700 - 900]$$

$$C(x) = -(x - 30)^2 + 1600$$

La producción es el número de artículos, es decir, 30.

15. Respuesta b.

Para saber cuál es la profundidad, tendríamos que hallar primero el vértice V (h; k) de la parábola; para ello, aplicamos $h = -b/2a$.

Determinamos en la ecuación:

$$a = 2 \qquad b = -6 \qquad c = 1$$

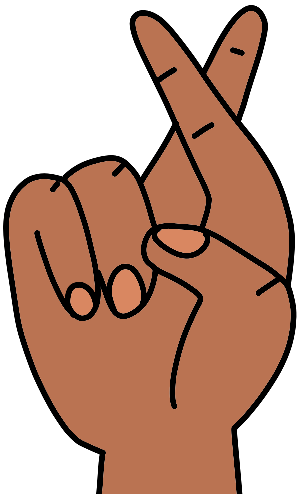
$$h = -(-6)/2(2) = 6/4 = 3/2 = 1{,}5$$

Reemplazamos:

$$f(x) = y = 2(1{,}5)^2 - 6(1{,}5) + 1$$

$$y = 2(2{,}25) - 9 + 1 = 4{,}5 - 9 + 1 = -3{,}5$$

Lo que representa y es el descenso hasta un punto máximo que está a 3,5 m de profundidad.



¡Sigamos aprendiendo... La Pre!