ÁREA DE MATEMÁTICA

Orientaciones para el Trabajo Pedagógico

2004

"Año del Estado de Derecho y de la Gobernabilidad Democrática"
"Década de la Educación Inclusiva"

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Javier Sota Nadal

VICEMINISTRO DE GESTIÓN PEDAGÓGICA
Idel Vexler Talledo

VICEMINISTRA DE GESTIÓN INSTITUCIONAL
Helenn Chávez Depaz

DIRECTOR NACIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y SUPERIOR TECNOLÓGICA
Luis Oswaldo Damián Casas

JEFE DE LA UNIDAD DE DESARROLLO CURRICULAR Y RECURSOS EDUCATIVOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
Guillermo Molinari Palomino

ORIENTACIONES PARA EL TRABAJO PEDAGÓGICO DE MATEMÁTICA:

REDACCIÓN DEL DOCUMENTO	:	Marcos Díaz Abanto
REVISIÓN GENERAL	:	Wilson Izquierdo González
CORRECCIÓN DE ESTILO	:	Federico Ortiz Agurto
DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN	:	Fimart S.A.C.
IMPRESO POR	:	Fimart S.A.C. Av. Del Río 111 - Pueblo Libre
TIRAJE	:	2 750 Ejemplares

Primera edición 2004

Programa de Mejoramiento de la Calidad de la Educación Secundaria
Convenio 1237 - MED - BID

Hecho el Depósito Legal
BNP: 1501212004 - 6811

Gobierno del Perú
Trabajo de peruanos

*Este documento se comenzó a elaborar siendo jefa de la UDCREES Juana Sacarsi Guzmán.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Este documento tiene como objetivo implementar el proceso de aplicación del Diseño Curricular Básico del área de matemática, en el nivel de Educación Secundaria.

En su elaboración, se ha tenido particular preocupación por el establecimiento de diferentes alternativas de trabajo, aplicables por el profesor, durante el desarrollo de sus sesiones de aprendizaje. Con ese propósito se han incluido actividades que garanticen aprendizajes significativos orientados hacia el desarrollo de capacidades fundamentales como el pensamiento creativo, el pensamiento crítico, la toma de decisiones y la solución de problemas en los alumnos, las mismas que, en matemática, deben lograrse a través de las capacidades de área siguientes:

- *Razonamiento y demostración.*
- *Interpretación de gráficos y/o expresiones simbólicas, y*
- *Resolución de problemas.*

Las capacidades de área enunciadas, a su vez, se desarrollan mediante capacidades o habilidades específicas, que son las que las operativizan a nivel de estrategias y procesos.

Es evidente que un docente que tenga como aspiración ser un “buen profesor de matemática”, debe tener especial interés tanto por el conocimiento y dominio de sus contenidos como por las capacidades y estrategias que hay que desarrollar en el aula para lograr su aprendizaje. En ese sentido, es por todos conocido, el hecho de que la matemática como “cuerpo teórico” es producto de la experiencia de la humanidad a lo largo de cuatro a cinco milenios, lo cual no implica que su creación y su utilización, a nivel rudimentario, no se produjera desde el inicio de nuestra civilización.

A partir de esta constatación elemental, se pretende que el alumno reflexione sobre su práctica diaria y desde allí, comience a construir todo el edificio de la matemática que hoy conocemos, haciendo uso, fundamentalmente, de su capacidad creativa y de solución de problemas. Por ello, su contenido incluye reflexiones, ideas y comentarios para enseñar a aprender a pensar, con ese nivel de coherencia lógica que sólo el aprendizaje de la matemática lo hace posible.

También se proponen actividades o “situaciones problema” que pueden trabajarse a partir de comentarios y sugerencias que generen actividades cercanas al entorno de la institución educativa y a los intereses de los alumnos. Es evidente que las sugerencias aquí presentadas no agotan todas las posibilidades existentes sobre este particular, pero si deben estimular y ofrecer condiciones que permitan al docente crear otras situaciones de acuerdo con su realidad.

Finalmente, todo lo que se desarrolla en este documento, debe entenderse sólo como “sugerencias” para el desarrollo del trabajo cotidiano y, las adaptaciones o adecuaciones que se hagan de él - cuando sean necesarias - como una más de las muchas posibilidades que ofrece la diversificación como proceso de enriquecimiento y mejoramiento del currículo.

CAPÍTULO I

ENFOQUE DEL ÁREA

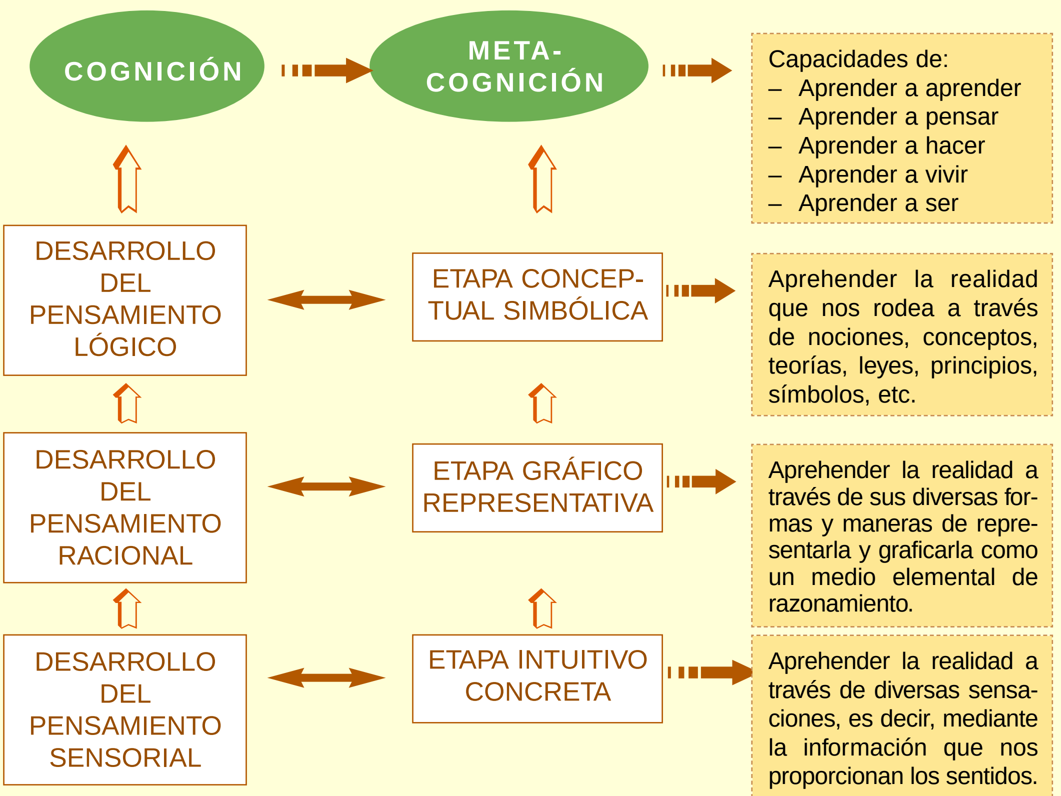
1. ACERCA DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO.

El desarrollo del pensamiento matemático, al igual que cualquier otra forma de desarrollo del pensamiento, es susceptible de aprendizaje. Nadie nace siendo poseedor de él. Sin embargo, aprender matemática puede ser un proceso tanto más fácil o más difícil, en la medida del uso que se haga de ciertas herramientas cognitivas.

Es importante dejar establecido que el pensamiento matemático se construye siguiendo rigurosamente las etapas determinadas para el desarrollo del pensamiento en forma histórica, existiendo una correspondencia biunívoca entre el pensamiento sensorial, que en matemática es de tipo INTUITIVO CONCRETO; el pensamiento racional que es GRÁFICO REPRESENTATIVO y el pensamiento lógico, que es de naturaleza CONCEPTUAL O SIMBÓLICA en esta disciplina.

El siguiente esquema nos muestra este proceso:

PROCESO DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA



Para poder aprender nociones abstractas o generalizaciones teóricas del tipo que abundan en matemática, es necesario que se hayan configurado en el cerebro humano, las estructuras mentales que hagan posible su asimilación, acomodación y conservación. Es indispensable, en consecuencia, que el mediador o facilitador del aprendizaje verifique antes de iniciar una sesión de matemática si las personas que aprenden poseen dichas estructuras mentales.

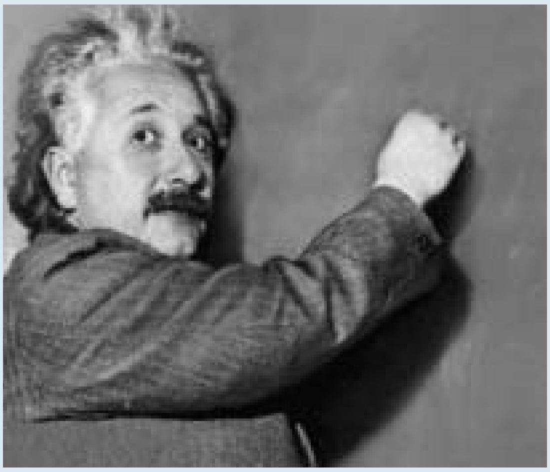
De lo contrario, es necesario realizar las manipulaciones, clasificaciones, construcciones, análisis y agrupaciones necesarias con material objetivo o concreto, para luego pasar a las representaciones gráficas y de allí, finalmente, a las formalizaciones que caracterizan a la matemática. De nada sirve obviar estos procesos. Existe la ventaja, sin embargo, de que el cerebro humano no tiene una edad límite para crear sus estructuras mentales. En matemática, nunca será tarde, entonces, para volver a ser niños y desarrollar nuestra capacidad de aprender a aprender a partir de "hacer cosas". Es importante sin embargo, esclarecer algunos aspectos fundamentales acerca del "quehacer matemático" para los que tienen como función la de ser mediadores en su aprendizaje.

¿Qué entendemos por pensamiento matemático y pensamiento científico? La visión holística y sistémica de la vida, rompió los compartimientos estancos en los que el paradigma cartesiano había clasificado al mundo. Al abandonar la división entre mente, sustancia y materia concreta, se transitó hacia la concepción de que mente y conciencia eran procesos nutridos por lo interdisciplinario. Nunca más, un tipo particular de conocimiento estaría solo y referido a sí mismo.

Con esta concepción integral de lo existente, sabemos que la matemática forma parte de este mundo global, por ello, pensar matemáticamente no es sólo pensar en "números". Para pensar matemáticamente, los estudiantes deberían tener experiencias numerosas y variadas en relación con la evolución cultural, histórica y científica de la matemática, de forma que puedan apreciar el papel que cumple en el desarrollo de nuestra sociedad actual y explorar qué relaciones existen entre la matemática y las áreas a las que sirve: las ciencias físicas y de la vida, las ciencias sociales y las humanidades.

Enfocado como proceso mental inmanente, puede comprenderse como pensamiento matemático o pensamiento científico, ya que trascendiendo las particularidades como lógico-matemático, fractal, biomatemática, comprende esas distintas formas de pensamiento.

A lo largo de la historia de la matemática, los problemas prácticos y la investigación teórica se han estimulado mutuamente hasta tal punto que es imposible deslindarlos. Incluso hoy día, a medida que la matemática teórica ha florecido en diversidad y ha profundizado en complejidad y abstracción, ha pasado a ser más concre-



ta e imprescindible a nuestra sociedad tecnológicamente orientada. Debemos centrar la atención sobre la necesidad de que los estudiantes tomen conciencia de la interacción que se da entre las matemáticas y las situaciones históricas que la impulsan y del impacto que tienen en nuestra cultura y en nuestras vidas.

La particularidad que ofrece el enfoque por procesos es que establece una continuidad, más allá de las rupturas y de la aparición de nuevas interpretaciones, siempre presentes, gracias al carácter transitorio de la ciencia.

¿Qué enseñar en matemática? El conocimiento matemático es jerárquico y acumulativo. Partiendo de esta base, es claro que cualquier concepto se basa en otros previos. Así se ha estructurado, históricamente, todo el conocimiento matemático existente. Pero, a la fecha, en esta sociedad del conocimiento en la que nos ha tocado vivir, es ilusorio pensar en querer abarcar por aprendizaje, todo ese "conocimiento matemático existente". Por eso, más que enseñar conocimientos matemáticos, habría que pensar en que los estudiantes aprendan a aprender la matemática. En otros términos, hoy en día es más importante aprender a aprender, es decir aprender cómo se aprende, y aprender a desaprender ciertas cosas, antes que tratar de aprender conocimientos matemáticos en sí.

El profesor, por lo tanto, tendría que partir "enseñando" lo que el estudiante ya sabe, es decir: las capacidades fundamentales de pensar creativamente, poseer un pensamiento crítico, tomar decisiones y solucionar problemas, respetando los ritmos de aprendizaje de cada estudiante y partiendo de lo que realmente sabe hacer mejor, y no de lo que debería saber.

Sin embargo, el **qué enseñar** no es tan incierto, como pareciera, dentro del marco general de la propuesta curricular establecida, ya que sólo habrá que seleccionar situaciones educativas que planteen problemas con el suficiente grado de dificultad como para que el estudiante trate de resolverlos, es decir, ni demasiado fáciles para que se aburran, ni demasiados difíciles para que no puedan solucionarlos, se espanten y huyan de ella.

Además de la complejidad de la estructura lógica de los problemas de matemáticas, hay que tener en cuenta que el contenido de los mismos sea significativo para el estudiante. Se aprende mejor aquello que nos interesa. La motivación por encontrar la solución a las situaciones problemáticas es mayor si éstas tienen algu-

na relación con su vida cotidiana y sus intereses. Por ello, para conseguir mantener la motivación, se tratará de buscar situaciones cercanas y conectadas a "la realidad de nuestros estudiantes".

¿A quién enseñar? La heterogeneidad del nivel cognitivo de los estudiantes en una clase, es una situación casi general y permanente. Cuando se pretende enseñar contenidos matemáticos al nivel medio de la clase, los estudiantes del nivel más bajo no comprenden la explicación, y los del más alto se aburren. Frente a este dilema, ¿a quién nos dirigimos?. Esto nos obliga a plantearnos la búsqueda de una metodología más adecuada a cada realidad educativa.

El aprendizaje es un proceso individual que cada estudiante realiza, a partir de situaciones de grupo, esto es, en la interacción social. Enseñanza individualizada es diferente de "clase particular". En una situación de grupo en la que varios estudiantes trabajen un mismo problema, cada uno adquirirá un conocimiento distinto, y serán distintos los ritmos de aprendizaje. Pero, lo importante es que todos participen en la resolución del problema planteado y que con esta actividad, avancen en el reacomodamiento y desarrollo de sus estructuras cognitivas y en el dominio de las capacidades fundamentales.

Lo deseable es que todos avancen lo más posible, y esto sólo se puede conseguir respetando las individualidades dentro de un grupo. No significa que se deje de lado el trabajo individual. Pretendemos llamar la atención sobre abusos de situaciones de enseñanza aprendizaje de la matemática que son inadecuadas para la formación del pensamiento matemático. Es tan importante, lo que se debe enseñar al estudiante en un momento determinado como el conseguir que participen de modo activo en la búsqueda colectiva de soluciones a las situaciones problemáticas, y observar sus respuestas para obtener el punto de partida real de su conocimiento matemático.

¿Dónde enseñar? En cualquier lugar se puede establecer una situación educativa propicia para el aprendizaje de la matemática. No nos podemos reducir al espacio del aula, el pupitre y la pizarra. El patio de recreo, las excursiones, el edificio escolar, el hogar, el barrio, el mercado, etc. pueden ser marcos idóneos para plantear y resolver problemas matemáticos relacionados con la vida real. En cambio, el aula es, por lo general, un espacio de sistematización de experiencias y de construcción colectiva de aprendizajes, más que de "enseñanza".

¿Cómo facilitar el aprendizaje? El conocimiento matemático aporta al estudiante, la estructura mental sobre la cual deben asentarse, sólidamente, el resto y la totalidad de sus conocimientos y experiencias de aprendizaje, dentro de estas, sus capacidades fundamentales de pensar creativamente y en forma crítica, de tomar decisiones y solucionar problemas. Aprender a pensar es, en cierta forma, aprender a pensar matemáticamente.

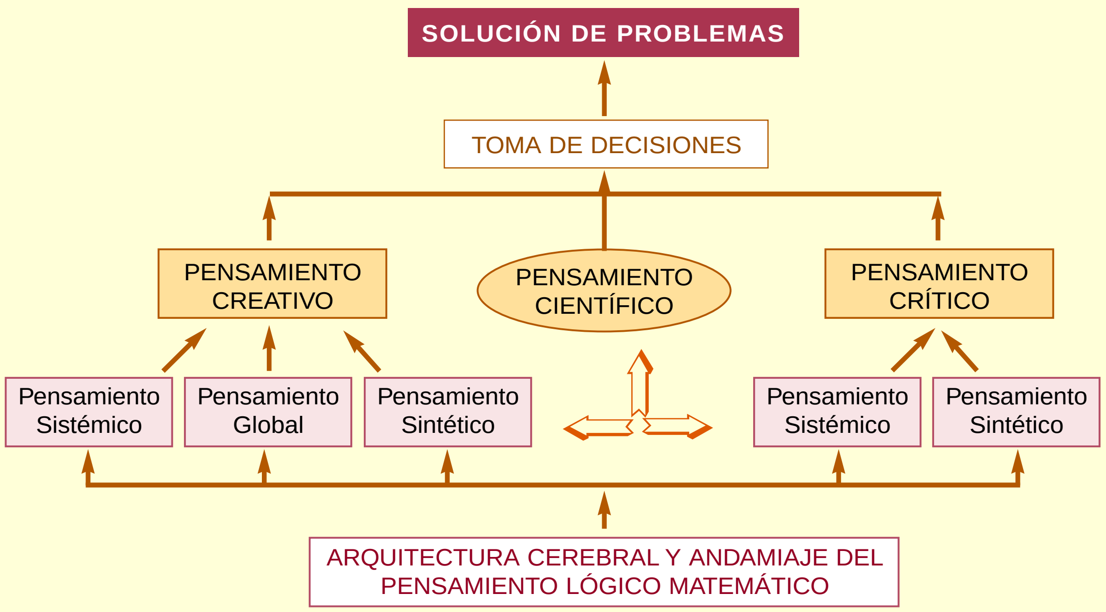
Cumplir estos objetivos significa que el proceso enseñanza aprendizaje ha de ser

participativo y que no se debe dar predominancia a la transmisión verbal. Según las teorías de David Ausubel y de Edgard Dale, la información verbal es lo que menos posibilidades tiene de ser aprendida significativamente. Por eso, aspirar copar por aprendizaje el conocimiento matemático existente, no es sólo una aspiración ilusoria, sino imposible, dadas las características que la sociedad del conocimiento posee hoy en día.

Desde otra perspectiva de análisis, el conocimiento matemático está formado en su totalidad, por un conjunto de abstracciones y generalizaciones teóricas. Entonces, lo que hay que enseñar a nuestros alumnos es a realizar abstracciones y a generalizar en lugar de tratar de que aprendan ese conjunto infinito de abstracciones y generalizaciones. En eso consiste, básicamente, **ENSEÑAR A PENSAR** en matemática. La aplicación de cualquier tipo de conocimiento matemático a un número variado de problemas de la vida cotidiana, sería otro de los objetivos importantes a lograr. Sin embargo, como puede apreciarse en el esquema siguiente, si enseñar a pensar es de por sí complejo, **APRENDER A PENSAR** lo es mucho más, porque tiene que ver con la capacidad de tomar decisiones y la de solucionar problemas.

Ocurre sin embargo, que siempre nos preguntaremos para qué estudiar tanta matemática. Eso de la raíz cúbica, el binomio de Newton, el teorema de Pitágoras, las factorizaciones, las ecuaciones con una, dos, tres... variables, etc., pareciera que no sirve para nada. Pero; claro, es que casi nunca nos hemos puesto a establecer para qué aprendemos matemática. Si lo hubiéramos hecho, todos nuestros aprendizajes en esta disciplina serían significativos y, eso, en términos de aprendizaje sería bastante. Por eso conviene dar respuesta a esta pregunta: ¿Qué porcentaje de todas las cosas que hemos aprendido en 17 o 18 años de escolaridad son, realmente, aprendizajes significa-

CAPACIDADES FUNDAMENTALES Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

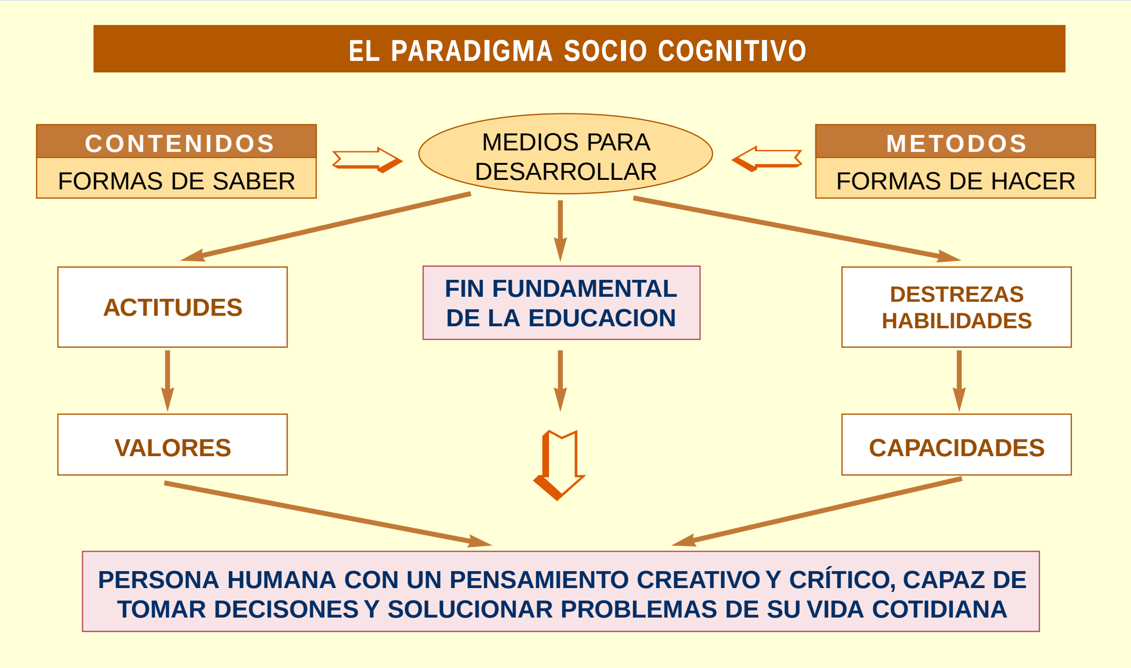


tivos?. ¿Tal vez un aproximado al 20 %?. Si eso es así, sería más que suficiente, pero parece que no lo es...

La matemática es una de las disciplinas más eficientes y eficaces para aprender a pensar. Cada aprendizaje matemático es una cognición. Si encima de eso, reflexionamos sobre cómo hemos aprendido matemática, estaríamos llegando a aprendizajes mucho más complejos como las metacogniciones. Entonces, la matemática sirve también para aprender a aprender y a desaprender, porque se aprende equivocándose, por ejemplo, más de lo que se aprende acertando. Se aprende lo que da resultado y se desaprende lo que nos lleva al error.

En ese sentido, el paradigma sociocognitivo precisa que los contenidos y los métodos deben utilizarse como medios para desarrollar CAPACIDADES y VALORES (traducidas en actitudes) en las personas:

Aprender a pensar implica adquirir la capacidad de pensar creativa y críticamente. Y, ser creativo y ser crítico, implican tener la capacidad de tomar decisiones oportunas y solucionar problemas, también, en forma oportuna. Eso se traduce en aprender a ser y en un aprender a hacer. La estructura del andamiaje conceptual que cada uno de nosotros tiene en su cerebro, debe utilizarse siempre para solucionar problemas. Si no hacemos uso del conocimiento matemático con esa finalidad, entonces los aprendizajes en matemática no son significativos, pierden vigencia y se olvidan con facilidad. Por lo tanto, una tarea fundamental es definir la



significatividad de los conocimientos matemáticos que aprendamos.

Por su parte, el conocimiento matemático, históricamente, siempre ha servido para solucionar problemas de la vida cotidiana. Ese es el uso que predominantemente se le ha dado y tiene hasta la fecha. Aunque infelizmente también ha servido para la fabricación de armas de guerra. Ese es el uso que jamás debió tener y que no debemos permitir que tenga en lo sucesivo.

El aprendizaje de la matemática debe orientarse hacia la adquisición de CAPACIDADES, sin descuidarse en este proceso, de los valores que se traducirán en actitudes observables en la vida diaria. Consideramos las siguientes capacidades fundamentales: aprender a pensar creativa y críticamente, aprender a tomar decisiones y solucionar problemas.

Como aspirar a copar por aprendizaje, todo el caudal de conocimientos matemáticos - y el que deriva de sus aplicaciones, existente a la fecha - resultaría una aspiración literalmente IMPOSIBLE de alcanzar, lo sensato es desarrollar en cualquier sistema educativo del mundo, ESTRATEGIAS para aprender a APRENDER y para aprender a PENSAR. No existe, al parecer, otra alternativa y ese es el reto que tenemos que asumir en este siglo.

Históricamente siempre ha servido para

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO → SOLUCIONAR PROBLEMAS DE LA VIDA COTIDIANA

2. LA MATEMÁTICA AL INTERIOR DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA

Entender y usar la matemática es un asunto de importancia central en nuestras instituciones educativas. Al interior de ellas, cuanta matemática aprendan los alumnos, y cuan bien lo hagan, depende en gran parte de las experiencias que los estudiantes adquieran en el aula y que les conviertan en ciudadanos adecuadamente informados, creativos, críticos y capaces de tomar decisiones y solucionar problemas. En este importante proceso intervendrán:

a) La cantidad o la calidad de los aprendizaje incluidos en la programación.
b) Los medios y materiales usados por los estudiantes en su aprendizaje.
c) Las expectativas propias de los estudiantes y la de los profesores, padres y administradores.

El trabajo pedagógico debe dar énfasis a lo más importante y significativo de la Matemática, es decir, a lo que es más aplicable a la vida cotidiana, debiendo basarse en principios didácticos que permitan:

a) Brindar una visión coherente e integral del contenido de la matemática.
b) Promover nuevos aprendizajes en los estudiantes y las capacidades para aprender a pensar.
c) Mejorar la eficiencia y eficacia de los profesores como facilitadores del aprendizaje.
d) Mejorar la comprensión y uso de la matemática.
e) Desarrollar un sistema de retroalimentación del aprendizaje sobre la base de la supervisión y la evaluación de los aprendizajes.
f) Posibilitar la utilización de la tecnología en un mundo que, cada vez, es más tecnológico.

Estos principios, como es de apreciarse, señalan cuestiones básicas sobre el trabajo pedagógico que hay que desarrollar en una matemática de calidad, al expresar la dirección y perspectivas que fundamentan el aprendizaje de las capacidades y los otros componentes del currículo y al fomentar un cambio sistemático en la actitud del docente, que se traduzca en la práctica, en una toma de decisiones oportuna y eficaz que solucione los problemas de los estudiantes en su aprendizaje.

Igualmente, los principios en los que se sustenta el Diseño Curricular Básico (DCB) de Matemática, se encuentran coherentemente articulados con las capacidades, los contenidos, los valores y las actitudes allí considerados, por lo tanto, deben dar direccionalidad al trabajo del aula y al que realice la Institución Educativa en su conjunto.

Las necesidades sociales para acceder al conocimiento matemático, a su vez, nunca fueron tan grandes, a consecuencia de la globalización y el progreso alcanzado en la comunicación, el tratamiento y uso de la información y, el conocimiento cien-

tífico y tecnológico en general. Sobre eso, se presume que esta necesidad continuará incrementándose, en razón de lo cual, estas necesidades incluyen lo siguiente:

- **Alfabetización matemática y cultural**

Las decisiones de la vida diaria son cada vez más matemáticas y tecnológicas. Nuestros estudiantes vivirán en un mundo donde predominará el manejo del conocimiento y la información, por lo que requerirán de la inteligencia en sus decisiones, de la originalidad de su pensamiento y de su capacidad para abordar y solucionar problemas con imaginación y originalidad. La matemática, en esa perspectiva, se constituye en una de las más grandes proezas culturales e intelectuales de la humanidad y, los estudiantes de secundaria, más que nadie, están en la obligación de desarrollar su capacidad de comprensión y manejo de estos espectaculares logros.

- **Matemática para el desempeño laboral**

Así como el conocimiento matemático ha aumentado dramáticamente - a tono con el avance logrado en el campo del conocimiento y la información en general - también los requerimientos laborales han incluido un nivel de desarrollo del pensamiento matemático y de la capacidad de resolución de problemas, dentro de los requisitos necesarios para un desempeño laboral eficiente, hecho que obliga a replantear el aprendizaje de esta disciplina desde sus cimientos.

Más importante que poseer conocimientos matemáticos puros, resulta tener capacidades que permitan aprender a aprender y adecuar la información disponible existente, a la solución de problemas de la vida cotidiana y del mundo laboral, campo en el cual pareciera que la matemática gana más terreno por cada día que pasa.

Por ejemplo: A las computadoras no habría sido posible fabricarlas, si previamente no se hubiera aplicado el sistema binario de numeración de la matemática, como uno de sus lenguajes operativos. En la actualidad, matemática y computación van de la mano. Otro tanto ocurre con el resto de ciencias nuevas y ciencias aplicadas.

3. PROPÓSITOS FUNDAMENTALES DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN SECUNDARIA

– **Aprender a valorar positivamente la matemática.** Los estudiantes deben saber apreciar el papel que cumple la matemática en el desarrollo científico y tecnológico experimentado en el mundo actual y explorar sus conexiones con las otras áreas y disciplinas del conocimiento.

– **Utilizar la matemática como medio de comunicación.** El lenguaje matemático permite expresar ideas diversas, formular enunciados, leyes y principios, y realizar generalizaciones; así como, reflexionar y clarificar conceptos y relaciones entre objetos, es decir, que el uso y manejo de signos, símbolos y términos para recibir y emitir información matemática, es lo que debe enfatizarse en el trabajo de aprender matemática.

– **Adquirir confianza en las propias capacidades para hacer matemática.** El aprendizaje de la matemática debe permitir a los estudiantes, desarrollar las capacidades de uso de todas sus potencialidades, no sólo para aprender nuevas nociones, conceptos y algoritmos, sino para dar sentido y direccionalidad a sus intervenciones en la solución de las situaciones problemáticas que les plantee la vida cotidiana en el ambiente al que pertenecen.

– **Resolver problemas de la vida cotidiana.** La matemática debe desarrollar en los estudiantes, su capacidad para plantear y resolver problemas si

queremos contar en el futuro con ciudadanos productivos. El desarrollo de la capacidad para resolver problemas, es la espina dorsal en la enseñanza a nivel secundario, de la matemática y obliga a que, algo tan evidente, se precise enfatizarlo. Sin embargo, tan importante como la capacidad de resolver problemas es la de saber plantearlos creativamente.

– **Aprender a razonar matemáticamente.** El trabajo matemático debe permitir al estudiante desarrollar su habilidad para elaborar y comprobar conjeturas, formular contraejemplos, seguir argumentos lógicos, juzgar la validez de un argumento, construir argumentos sencillos válidos, etc. La matemática es una buena escuela de raciocinio. Al respecto, analicemos el siguiente texto, que ilustra cabalmente lo que se acaba de describir:

“La Matemática se aprende y se enseña pero, también, se crea y utiliza”

4. EN TORNO AL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Para que el aprendizaje de la matemática sea una tarea de mediación o facilitación gratificante para el profesor y de adquisición de capacidades, conocimientos y valores para el estudiante, es necesario que su comprensión y – fundamentalmente - su manejo, tengan un propósito funcional, tanto en los aspectos algorítmico, estructural como de contexto, que le permitan resolver problemas en la vida cotidiana, haciendo uso, principalmente, de modelos, estructuras y simulaciones.

En el esquema que antecede deberemos entender como:

LA COMPRENSIÓN Y EL USO FUNCIONAL DE LA MATEMÁTICA

Comprende los aspectos

ALGORÍTMICO	ESTRUCTURAL	CONTEXTUAL
Aplicación de Reglas	Propiedades de las Operaciones	Problemas de la Realidad

PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LA VIDA COTIDIANA

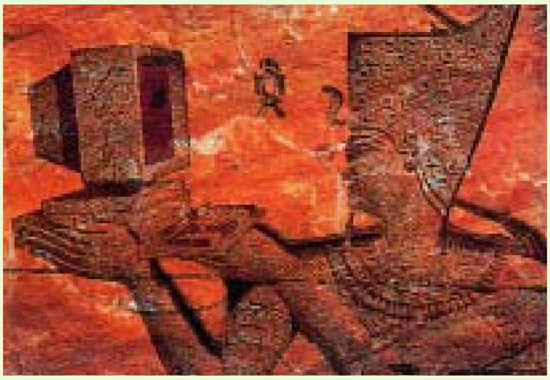
UTILIZANDO MODELOS, ESTRUCTURAS Y SIMULACIONES MATEMÁTICAS

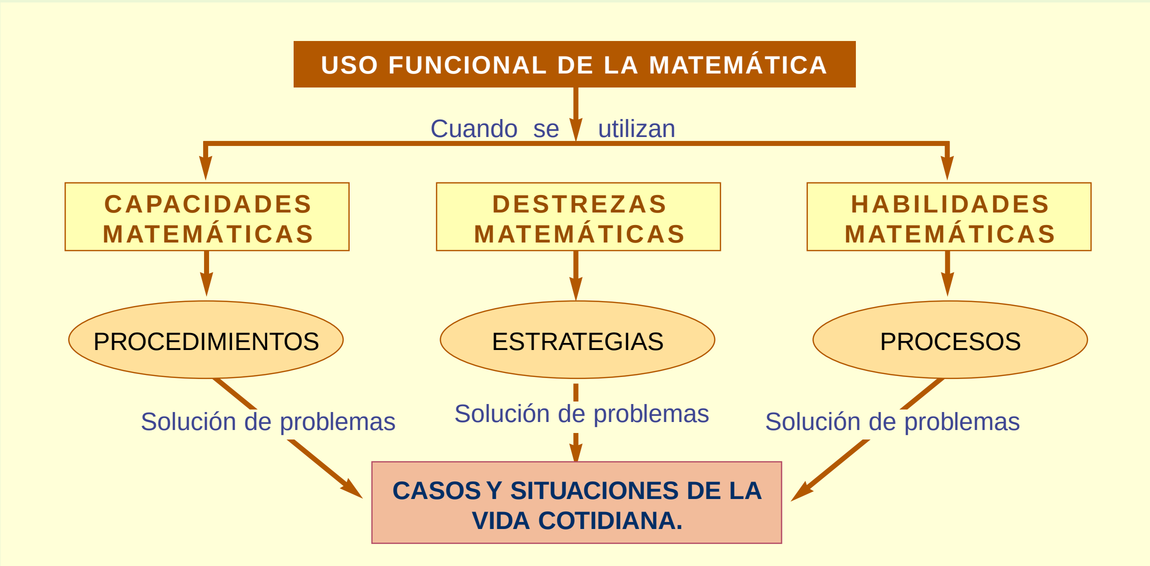
– ***Comprensión o entendimiento de la matemática.*** Es un proceso que se va adquiriendo o desarrollando con el tiempo y con el tipo de experiencias que se tiene. No es un producto, es decir, no es algo que una persona posea o no, desde su nacimiento. Por esta razón los estudiantes deben desarrollar su capacidad de comprensión de la matemática, de acuerdo con su propio nivel de maduración y con el tipo de experiencias que le ofrezca el docente, la Institución Educativa y la propia vida.

– ***Uso funcional de la matemática.*** "Usar la matemática" significa recopilar, descubrir y recrear información y conocimientos en el curso de una actividad. Este uso se da por la observación, manipulación, experimentación, extrapolación o conexión de la información matemática, con un proceso activo de la vida cotidiana, que no es lo mismo que el dominio de conceptos y procedimientos. El uso es funcional cuando una CAPACIDAD o habilidad matemática se utiliza en situaciones y realidades diversas (Diversibilidad), cuando se emplea para solucionar casos variados, sean éstos similares o disímiles entre sí (Variabilidad) y, cuando se aplica en forma generalizada a un universo de casos (Generalidad).

Aspecto algorítmo de la matemática. Se refiere a la comprensión y aplicación de procesos estratégicos y procedimientos. Por ejemplo: resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita, puede hacerse aplicando la fórmula general (regla), completando el cuadrado (procedimiento) o mediante operaciones de cálculo y procesos específicos (algoritmo).

– **Aspecto estructural de la matemática.** Se refiere a la comprensión y manejo de las diferentes estructuras matemáticas y se pone de manifiesto al usar las propiedades de la estructura.





En otros términos, es la “visión del bosque sin perder de vista el árbol”, es decir, tratando de buscar las conexiones entre el operación que hay que realizar y los diferentes principios, leyes, categorías, conceptos y procedimientos matemáticos.

– **Aspecto contextual de la matemática.** Se refiere a la pertinencia de la aplicación de un concepto o procedimiento, a una situación problemática en particular. Por ejemplo, muchos estudiantes saben multiplicar, pero no saben cuándo ni dónde utilizar ese conocimiento y el algoritmo respectivo, para solucionar problemas concretos en la realidad de la que forman parte. Este aspecto, como es fácil de inferir, es el menos trabajado por los docentes y muchos problemas que se plantean, no están vinculados a la realidad de los alumnos.

Con frecuencia, por ejemplo, se plantean al estudiante problemas de este tipo: “Si una camisa me costó S/. 30.00 ¿cuánto pagaré por 20 camisas”?. La respuesta, sin contextualizar el problema, obviamente resulta de multiplicar 30 x 20. Pero, ¿acaso no tendría que considerarse el hecho de que en 20 camisas hay más de docena y media y que el precio de una camisa al por mayor, es decir, por docena, es menor a S/. 30.00?. Eso lo sabe cualquier persona adulta y hasta los niños de los primeros grados de primaria. Entonces, ¿porqué no contextualizar el problema a la realidad con este tipo de datos?.

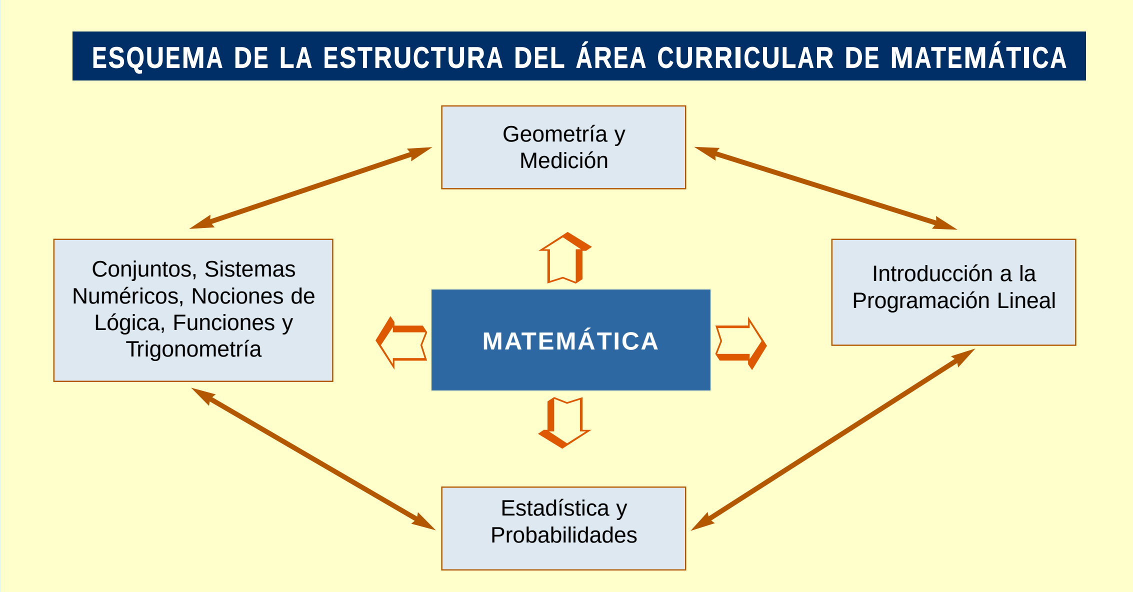
Una de las metas prioritarias del proceso de enseñar y aprender matemática ha de centrarse en conseguir que los estudiantes se convenzan de que poseen suficientes capacidades para utilizarla como un lenguaje en su vida cotidiana, así como, que son capaces de manejar sus contenidos cuando lo necesiten y que, sobre eso,

tienen control de su éxito o fracaso, sobre su desempeño matemático.

5. ORGANIZACIÓN DEL ÁREA

– **Componentes del área.** Si bien, todo el conocimiento matemático existente se puede agrupar al interior de los temas: conjuntos, relaciones, número, espacio, medida y análisis, para efectos de tratamiento pedagógico, el área curricular de matemática en educación secundaria se ha estructurado, esta vez, en base a cuatro componentes, que son los que se describen a continuación. Sin embargo, esto no quiere decir que deban verse como compartimentos estanco o en forma disciplinar, como si se tratara de los componentes de un diseño modular, ya que, en este caso están concebidos como un todo y sus elementos metodológicamente separados, guardan estrecha relación entre sí, en razón de lo cual, deben desarrollarse en forma integrada y conexa.

Sin duda, en cualquier sistema educativo del mundo, la matemática se concibe y se estructura con fines de enseñanza aprendizaje, como un todo integrado en el cual sus componentes tienen que tener, nece-



sariamente, una forma en espiral de organización y desarrollo. Las "matemáticas" de compartimientos estanco, ha dejado de existir hace ya muchos años, en la educación. Sólo existen como "matemática pura" para fines de especialización.

I. Conjuntos, sistemas numéricos, nociones de lógica, funciones y trigonometría

El incremento continuo de la presencia de información cuantitativa, debido en parte a la difusión de los métodos numéricos y al auge de las computadoras, pone de manifiesto la necesidad de una comprensión y tratamiento de los números, desde una perspectiva más amplia, que no puede limitarse únicamente al manejo de las operaciones básicas y las destrezas operatorias con expresiones algebraicas.

En la actualidad los estudiantes deben tener la capacidad de interpretar los números utilizados al describir procesos simples y complejos, de razonar con conjuntos de variables interrelacionadas, y de crear e interpretar de manera crítica, métodos para cuantificar fenómenos cuando no existe un modelo preestablecido. Así mismo, necesitan desarrollar capacidades para: identificar relaciones en situaciones nuevas y expresarlas en una forma simbólica eficaz, procesando la información mediante el uso de nuevas tecnologías e interpretando los resultados de tales cálculos con aproximaciones de mayor exactitud.

Diversos estudios muestran que las habilidades requeridas para describir e interpretar información cuantitativa estructurada, sacar inferencias y probar la plausibilidad de las conclusiones, se encuentran principalmente en la comprensión de las propiedades fundamentales de los sistemas numéricos y en la vinculación entre estos sistemas matemáticos y las situaciones de la vida real en la que se encuentran incluidos, así como, en el pase de la generalización del razonamiento aritmético al álgebra.

Este componente incluye el estudio de la teoría de conjuntos, los números y sus relaciones, los sistemas numéricos, nociones de lógica, cálculo y estimaciones, construcción, análisis de algoritmos, álgebra, funciones y trigonometría. El bloque, aparentemente complejo, se simplifica en la medida en que se organicen y se desarrollen en espiral, es decir, de lo simple a lo complejo, de lo conocido a lo desconocido o de lo concreto a lo abstracto. Como se sabe, uno de los ejes centrales de la matemática es el concepto de función, razón por la cual se considera su estudio desde el primer grado, para permitir un enriquecimiento progresivo y la profundización de este valioso concepto en los años siguientes.

II. Geometría y medición

Desde que nacemos nos enfrentamos a un mundo tridimensional, estamos rodeados de formas simples y complejas, a las cuales podemos acceder directamente, pero también nos encontramos con múltiples representaciones bidimensionales de estas formas, las cuales observamos en pinturas, fotografías, computadoras, televisión, cine, etcétera. Muchas de esas representaciones nos sirven para comprender, organizar y transformar el mundo tridimensional en que vivimos.

Teniendo en cuenta estos dos aspectos de la realidad, creemos que una necesidad fundamental de los adolescentes radica en la conveniente administración de estos dos “mundos”, tanto del plano (bidimensional) como del espacial (tridimensional). Por ello, este componente está orientado a brindar experiencias de aprendizaje que les permitan comprender, organizar, codificar y simbolizar el entorno espacial en el que se desenvuelven y relacionarlos con las representaciones planas que de ellos se realizan.

Muchas ocupaciones laborales hoy en día están relacionadas con el conocimiento y manejo de las propiedades generales de la forma, los sistemas organizados de representación, la geometría de las transformaciones y la medición, por ello es importante desarrollar habilidades de representación del espacio, tanto en sistemas coordenados rectangulares como en entornos virtuales. Un estudio detallado de las transformaciones de las formas y su relación con operaciones matemáticas, ayudará a los adolescentes a desarrollar las habilidades necesarias para desempeñarse con éxito en el mundo contemporáneo.

En Geometría y Medición se aborda el estudio de las figuras geométricas en dos y tres dimensiones; así como, los diferentes sistemas de representación, incluyendo geometría analítica y las medidas. No se descuida una iniciación al pensamiento formal estructurado y a las técnicas de demostración, a través de la geometría euclidiana, pues; mediante ella, los alumnos ejercitarán su pensamiento deductivo formal, a la par que contarán con un medio para disciplinar su pensamiento.

III. Estadística y probabilidades

La facilidad provista por la tecnología para manejar grandes cantidades de datos, ha hecho que las técnicas de presentación y análisis de información obtengan una difusión importante. Las gráficas estadísticas son una de la mejores formas para transmitir información masivamente, basta observar los medios de comunicación para percibir el gran prestigio que tiene hoy en día el trabajo estadístico.

Los estudios estadísticos de carácter predictivo, por ejemplo, influyen en las opiniones de las personas. Esto es corrobora-

ble, ya que desde los empresarios hasta la población en su conjunto (en especial en temas electorales) usan estos métodos para tomar decisiones. Hoy más que nunca, debido a la influencia de los métodos estadísticos en los medios generadores de opinión, es importante que los estudiantes adquieran la capacidad de ser críticos, respecto del uso que de ellos se hace. Experiencias de aprendizaje centradas en la organización, gestión y análisis de datos reales, les proporcionarán herramientas de análisis muy efectivas para desenvolverse en el mundo moderno.

Los frecuentes cambios que experimenta la sociedad actual, hacen imprescindible que los adolescentes desarrollen un pensamiento probabilista, para utilizarlo al evaluar riesgos y tomar decisiones. La vida es una continua toma de decisiones y cada decisión supone una elección entre distintos estados posibles, cada uno con una determinada probabilidad.

Este componente muestra cómo pueden tratarse matemáticamente situaciones inciertas, instruye sobre el análisis de gráficos, educa para comprender la simulación de situaciones y graduar la mayor o menor confiabilidad de ciertos resultados; ayuda a comprender los juegos de azar y los seguros, introduce la idea de correlación entre variables y también el desarrollo y análisis de los algoritmos. Finalmente ejercita el razonamiento y la creatividad.

IV. Introducción a la programación lineal

La Programación Lineal constituye un excelente ejemplo de interactuación de la matemática con otras disciplinas científicas y tópicos diversos, incluso con aquellos que, aparentemente, son comunes y corrientes. Como el título de este acápite bien lo refleja, en 5° de secundaria que es el año en que se abordará este contenido básico, se desarrollará sólo una "introducción a la programación lineal", es decir, comprenderá lo que ha de entenderse como investigación operativa elemental y no como la técnica específica de determinación de la ruta o camino crítico (CPM) o la de "Programación, evaluación y revisión técnica de proyectos" (PERT) u otras como el "Montecarlo", dejándose en claro que, las siglas enunciadas en paréntesis, corresponden a los nombres que estas técnicas de programación lineal tienen en Inglés.

Para comprender mejor sobre qué versará esta introducción, es necesario aclarar que consistirá solamente en la "**determinación de la mejor opción** – matemática se entiende - **de entre un conjunto complicado de alternativas**". Con ese propósito, veamos un ejemplo:

"Una compañía fabrica dos tipos de artefactos: manuales y eléctricos. Cada uno de ellos requiere para su fabricación el uso de tres máquinas: A, B y C. Un artefacto manual requiere del empleo de la máquina A durante dos horas, de la máquina B durante una hora y de la máquina C, también, durante una hora. A su vez, la fabricación de un artefacto eléctrico requiere de una hora en A, dos horas en B y una hora en C. El número máximo de horas disponibles por mes, para el uso de las tres máquinas es de 180, 160 y

100 respectivamente y la utilidad que se obtiene con artefactos manuales es de S/. 4,00 y de S/. 6,00 para los eléctricos. Si la compañía vende todos los artefactos que fabrica ¿cuántos de ellos por cada tipo se deben elaborar con el objeto de maximizar la utilidad mensual?

Consideremos:

x : Número de artefactos manuales que se fabrican en el mes

y : Número de artefactos eléctricos que se fabrican en el mes.

p : Utilidad mensual

SOLUCION: Un resumen de los datos se puede preparar utilizando una tabla como la siguiente:

FORMA DE PRODUCCIÓN	A	B	C	Utilidad por Unidad
Manual	2 h	1 h	1 h	S/. 4,00
Eléctrico	1 h	2 h	1 h	S/. 6,00
Horas disponibles	180	160	100	

Se quiere maximizar la **función objetivo: P = 4x + 6y** sujeta a la condición de que x e y debe ser una solución para el sistema de inecuaciones:

$$
\begin{array}{rcll}
2x + y & \leq & 180 & (2.13)\\
x + 2y & \leq & 160 & (2.14)\\
x + y & \leq & 100 & (2.15)\\
x & \geq & 0 & (2,16)\\
y & \geq & 0 & (2.17)
\end{array}
$$

A las restricciones (2.16) y (2.17) se les denomina ***condiciones de no negatividad***. La región que satisface simultáneamente las condiciones de (2.13) a (2.15) se denomina ***región factible***. Aunque existen una cantidad infinita de soluciones se debe hallar la que maximice a la función utilidad. Resolviendo cada inecuación se puede encontrar los valores correspondientes y graficarlos.

Se puede, igualmente, probar que una función lineal definida sobre una región factible acotada y no vacía, tiene un valor máximo (o mínimo), y se puede encontrar este valor en un vértice. Esta afirmación permite halar soluciones óptimas, para lo cual es suficiente evaluar a la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible y después elegir aquel en que la función objetivo resulte óptima. En nuestro caso tenemos:

S (40, 60) B (80, 20) C (90, 0)
D (0,0) E (0, 80)

Entonces se avalúa la función objetivo en cada punto:

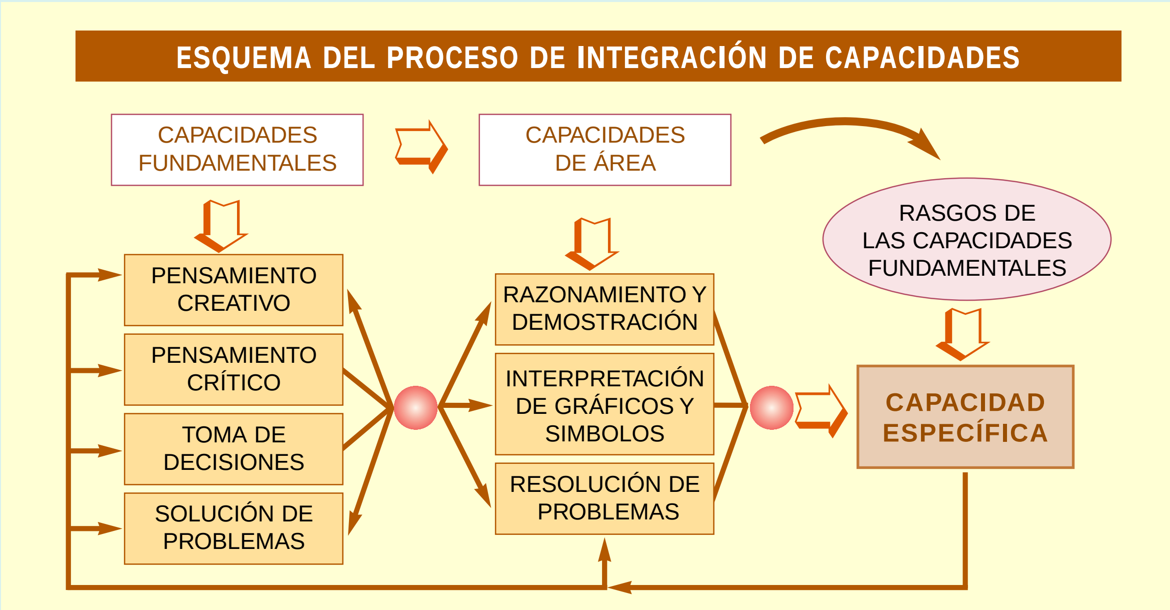
$$
\begin{array}{lclcl}
P\,(40, 60) & = & 4(40) + 6(60) & = & 520\\
P\,(80, 20) & = & 4(80) + 6(20) & = & 440\\
P(90, 0) & = & 4(90) + 6(0) & = & 360\\
P(0, 0) & = & 4(0) + 6(0) & = & 0\\
P(80, 80) & = & 4(0) + 6(80) & = & 480
\end{array}
$$

Por consiguiente P tiene un valor máximo de S/ 520,00 en A en donde x = 40 e y = 60

6. CAPACIDADES DEL ÁREA DE MATEMÁTICA.

Para matemática se han previsto tres capacidades de área, las mismas que se presentan en el esquema de la siguiente página:

El área de matemática, como componente del Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria, está organizado en función de 4 CAPACIDADES FUNDAMENTALES, 3 capacidades de área y - tantas como sean necesarias - capacidades específicas. **La relación entre las capacidades fundamentales, las capacidades de área y las capacidades específicas, no es lineal**. Esto quiere decir que, para la capacidad fundamental "Pensamiento Creati-



vo" no hay una capacidad de área que se relacione directamente con ella, y éstas, a su vez, con alguna capacidad específica porque, sencillamente, al concretarse en una capacidad específica con la cual el profesor trabajará en el aula, se ha producido un proceso de integración.

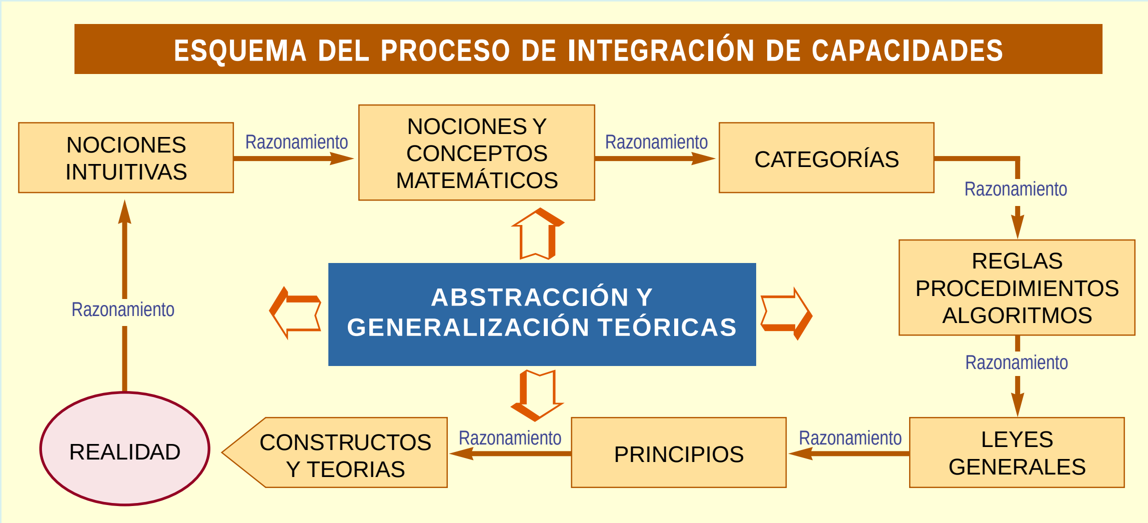
La capacidad específica INTERPRETA, por ejemplo, insume dentro de ella a cualquiera de las tres capacidades de área, porque puede ser aplicable a las capacidades de área: "razonamiento y demostración", "interpretación de gráficos y símbolos" o "resolución de problemas", siempre y cuando, el contenido básico o la actitud que sirvan de medios para lograrlas, así lo posibiliten. De modo similar, en una capacidad de área pueden integrarse las 4 capacidades fundamentales y no sólo una en particular. Planteadas estas bases, puede analizarse lo que cada capacidad de área implica:

a) Razonamiento y demostración

El razonamiento es una parte integrante del quehacer matemático y está conectado a los otros procesos. Por ejemplo, cuando se resuelven problemas se buscan estrategias de solución utilizando razonamientos plausibles y se establecen conexiones entre diversos conceptos y categorías utilizando símbolos, esquemas y gráficos.

Desde los primeros grados, los estudiantes desarrollan sus habilidades de razonamiento al formular y analizar conjeturas, al representar sus conclusiones lógicas o cuando justifican sus apreciaciones. Conforme avanzan en sus años de estudios, sus argumentos se tornan más sofisticados. Este proceso acompaña a la persona toda su vida, por lo que es conveniente ejercitarlo sistemáticamente a lo largo de toda la educación básica.

Desde esta perspectiva, sería incorrecto separar los procesos, como lamentablemente está ocurriendo en algunos colegios al crear un curso de "razonamiento matemático", el cual, en realidad, pretende que el estudiante se "adiestre" en la solución de ejercicios típicos de los exámenes de admisión a las Universidades e Institutos, sacrificando así la creatividad y el desarrollo del pensamiento matemático.

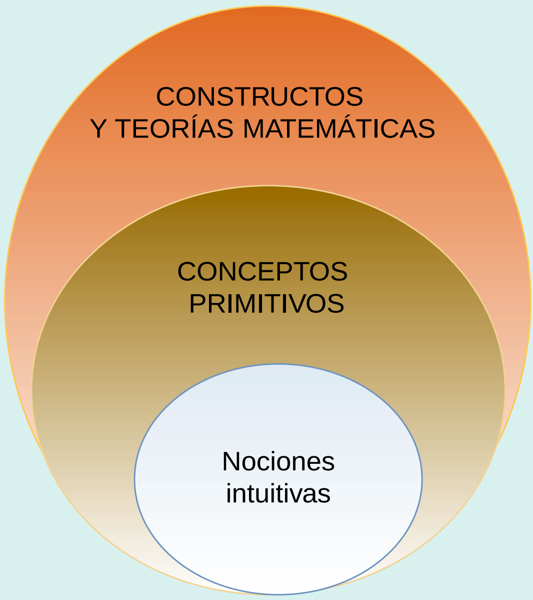


Los conceptos forman una parte sustancial del edificio teórico de la matemática y, al reflejar lo que es esencial en una clase determinada de "objetos", constituyen el punto de partida y los elementos en base a los cuales se estructura como disciplina científica formal. Sin los conceptos matemáticos no habría teoría matemática. Los conceptos se relacionan entre sí a través de conectivos y cuantificadores para dar origen a los enunciados, los constructos, los principios, las leyes y las teorías. Son básicos por ejemplo, los conceptos primitivos que no se definen. "Conjunto" es por ejemplo, un concepto primitivo en la teoría de conjuntos, lo mismo que "punto" lo es en la geometría y "número" en la teoría del número.

Sin embargo, es bueno dejar esclarecido que un concepto no es equivalente a una noción. Las nociones a veces suelen ser intuitivas. En cambio los conceptos no. La noción intuitiva de conjunto por ejemplo es equivalente a "grupo", colección", "montón", etc. Sin embargo, como concepto primitivo que no se define, puede estar referido a un grupo de elementos, a un elemento (unitario) o a ninguno (vacío o nulo).

Los conceptos no se aprenden por repetición, se deben comprender, conectar con los conocimientos previos y considerarlos en una estructura que les de sentido. Los conceptos irán creciendo y se desarrollarán en el tiempo, como parte del proceso de aprendizaje y uso de cada uno, es decir, se enriquecen y fortalecen en la práctica.

Dentro del campo conceptual aparecen otros de menor nivel de generalidad y alcance, como los datos, las variables, los indicadores, los parámetros y los rangos, que generalmente se me-



morizan y se reconocen o identifican dentro de un conjunto dado de información. Como todos sabemos, en matemática es importante hacer uso de ciertos términos y símbolos para denotar o representar ideas o relaciones matemáticas, además de los conceptos.

b) Interpretación de gráficos y expresiones simbólicas

En una sociedad en la cual la información cuantitativa y sus representaciones tienen una presencia cada vez mayor, la habilidad para expresar ideas matemáticas en forma coherente - tanto a sus pares, como a profesores y a otras personas - es de vital importancia. Para este fin, muchas veces se suele utilizar, por ejemplo, gráficos digitales de relaciones entre conjuntos, gráficos cartesianos de una función lineal o gráficos matriciales de un producto cartesiano, en tanto, en otras circunstancias, se usarán símbolos y notaciones o expresiones simbólicas, como suele ocurrir generalmente en el álgebra, en una ecuación o en una fórmula cualquiera.

El lenguaje matemático ayuda a los estudiantes a desarrollar sus habilidades para formular argumentos convincentes y para interpretar y representar ideas matemáticas en forma gráfica o simbólica. Hace referencia también a la capacidad de obtener y cruzar información proveniente de diferentes fuentes (textos, mapas, esquemas, etcétera).

c) Resolución de problemas

"...Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no había previamente camino alguno, es encontrar la forma de salir de una dificultad de donde otros no pueden salir, es encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir un fin deseado que no es alcanzable de forma inmediata, si no es utilizando los medios adecuados..."[1]

Un problema en matemática puede definirse como una situación - a la que se enfrenta un individuo o un grupo - para la cuál no se vislumbra un camino aparente u obvio que conduzca hacia su solución. Por tal razón, la resolución de problemas debe apreciarse como la razón de ser del quehacer matemático, un medio poderoso de desarrollar el conocimiento matemático y un logro indispensable para una educación que pretenda ser de calidad. El elemento crucial asociado con el desempeño eficaz en matemática es, precisamente, el que los adolescentes desarrollen diversas estrategias que les permitan resolver problemas donde muestren cierto grado de independencia y creatividad.

Si bien la elaboración de estrategias personales de resolución de problemas, crea en los alumnos confianza en sus posibilidades de hacer matemática, estimulando su autonomía y expresando el grado de comprensión de sus conocimientos, plantear problemas desarrolla su creatividad en un grado que resulta insospechado todavía. Hasta la fecha se ha estado insistiendo en la solución de problemas conocidos en los libros de matemática, para los que hay, también, soluciones

1 G.Polya en Krulik y Reys 1980,p1

y algoritmos conocidos para resolverlos. Por lo tanto, resultará tanto más edificante, que el alumno se ejercite en solucionar problemas, como en plantearlos y descubrir los algoritmos de solución respectivos.

Sin embargo, se puede afirmar que un verdadero problema en matemática, puede definirse como una situación que es nueva para el individuo a quien se pide resolverlo y, muchas veces, los problemas existentes en los libros son totalmente desconocidos para los alumnos.

- **Exigencias para la formulación de problemas:** Un problema está bien formulado cuando:

1. El texto es claro e inequívoco y sobre su contenido, no existe ninguna duda
2. Todas las interpretaciones que se hagan del contenido del problema son unívocas y confiables
3. El texto está formulado con enunciados directos y datos completos, claros y precisos.
4. El texto está completo, no tiene lagunas ni aspectos que rebasan los límites de dificultad establecidos en las reglas previas de juego.
5. La pregunta está bien formulada. (La pregunta suele escribirse al final del problema, aun cuando ésta no es una regla absoluta).

- **La resolución de problemas:**
La resolución de problemas debe pensarse como un proceso que atraviesa todo el diseño curricular y que provee el contexto en el cual los conceptos, los valores y las actitudes pueden ser aprendidos. En el proceso de resolución de problemas, igualmente, se aplican diferentes procedimientos y estrategias, así como, recursos o métodos generales que permitan hallar soluciones originales y diferentes.

La elaboración de estrategias personales de solución de problemas, crea en los alumnos confianza en sus posibilidades de hacer matemática, pues se asienta sobre los saberes que ellos pueden controlar.

LOS PROBLEMAS PONEN EN JUEGO

- Procedimientos de rutina tales como contar, calcular, graficar, transformar, medir.
- Procedimientos más complejos, conocidos con el nombre de estrategias

Los algoritmos son importantes en el proceso de solución de problemas ya que, establecida la estrategia de solución, sin un conocimiento y manejo adecuado de ellos no podríamos culminar la tarea con éxito. Los algoritmos designan el conjunto de procesos, pasos secuenciales previamente establecidos y formas de actuar para llegar a resolver tareas. Se tratan siempre de formas de proceder prefijadas, efectivas y sistemáticas, las cuales se orientan al logro de un objetivo específico.

La matemática es por naturaleza, procedimental. Históricamente, se ha interesado por procedimientos que tienen o que están relacionados con la técnica de resolución de una operación y de su expresión simbólica. Según Hilbert y Lefevre, 1986, "Los algoritmos son procedimientos que resuelven un determinado problema matemático. Se caracterizan fundamentalmente por prescribir una secuencia lineal de instrucciones de forma que, cumpliendo etapa tras etapa, se llegue a la solución requerida".

Los procedimientos designan el conjunto de acciones, pasos secuenciados, fijos y rutinarios previamente establecidos y formas de actuar para llegar a resolver tareas. Se trata de conocimientos referidos al saber hacer "con las cosas" o "sobre las cosas, las personas, la información, las ideas, los números, la naturaleza, los símbolos", etc. Se tratan siempre de formas determinadas y concretas de proceder, de maneras sistemáticas y ordenadas de llevar a cabo una tarea; de unos pasos tras de otros, pero que se orientan hacia la consecución de una meta. El manejo procedimental de un algoritmo tiene, entre otras, las siguientes ventajas:

- Reduce el número de errores posibles.
- Aumenta la posibilidad de transferencia hacia otros aprendizajes.
- Permite la reconstrucción cuando se ha olvidado algún paso.

Lo expresado se clarifica en el esquema que se muestra al final de esta página.

En el área curricular de Matemática del DCB 2004 de Educación Secundaria, se está enfatizando en la capacidad de **Resolución de Problemas**, por resumir mejor que cualquier otra, el propósito del aprendizaje de la matemática en la educación básica y en la vida misma. Resolver problemas no es un aprendizaje nuevo ni diferente de otros que ya se han estado trabajando en secundaria, es más bien un proceso que debe teñir el programa entero y proporcionar el contexto donde puedan aprenderse todos los demás elementos componentes.

Las situaciones problemáticas, sean de probabilidad, estadística, geometría y números naturales o racionales y otros, determinan con mucha facilidad la "necesidad de saber", motivando al estudiante hacia el desarrollo de conceptos, enunciados y teorías. Cuando la matemática se

LOS APRENDIZAJES QUE COMPRENDE UNA CAPACIDAD

origina de forma natural, es decir, a partir de situaciones problemáticas contextualizadas en la realidad de los estudiantes, pasa a ser una actividad relevante y ayuda a los alumnos a ligar sus conocimientos con las situaciones del mundo real.

Si se desearía, por ejemplo, confirmar el nivel de aprendizaje del valor posicional de los números, la multiplicación y el significado de la numeración, propondríamos un ejercicio como el siguiente: *"Escoge cinco dígitos. Usa los cinco primeros dígitos para formar un número de dos dígitos y otro de tres dígitos, de forma que su producto sea el máximo posible. Después busca la combinación que dé el producto más pequeño. Puedes ayudarte con una calculadora"*[2]. Cada alumno debe buscar su propio camino y luego comparar sus resultados y sus procesos metacognitivos.

El aprendizaje de la matemática no debe reducirse a tan sólo la memorización de reglas y algoritmos. Estos sólo tienen sentido, si son lógicos, divertidos y útiles. Los modelos manipulativos y otros modelos físicos, a su vez, ayudan a relacionar los procedimientos y algoritmos con los hechos conceptuales que los apoyan y proporcionan objetos concretos a los que se hará referencia a la hora de explicar y justificar las ideas.

Bajo estos parámetros el docente evitará, en lo posible, resolver "problemas tipo". Esta práctica sólo encasilla y no permite que el estudiante explore todos los caminos posibles para dar soluciones a los problemas planteados o problemas creados o por crear. El alumno ha de cuestionarse permanentemente así: ¿por qué tengo que pensar que esta respuesta es buena o es la única?, ¿Hubiera llegado a la misma respuesta utilizando los mismos materiales en situaciones distintas? Hemos de transmitir al estudiante la importancia del pensamiento crítico y consolidar su espíritu inquisitivo.

Finalmente, los estudiantes han de aprender a valorar el proceso de resolución de problemas en la misma medida en que valoran los resultados, han de aprender en la práctica, a crear problemas y a partir del mundo real: organizar datos, resolver ecuaciones, etc. Mas, todo ello, sólo lo aprenderán si el mismo docente lo incorpora a su diaria práctica educativa.

7. CONTENIDOS BÁSICOS Y APRENDIZAJES ESPERADOS EN EL ÁREA DE MATEMÁTICA

Los contenidos básicos del área de matemática son los mismos que se encuentran considerados en el Diseño Curricular Básico 2004.

ESQUEMA DEL PROCESO DE GENERACIÓN DE UN APRENDIZAJE ESPERADO

Capacidad Específica → más → Contenido Básico → más → Actitud → igual → **APRENDIZAJES ESPERADOS**

[2] Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática- SAEM THALES p.72

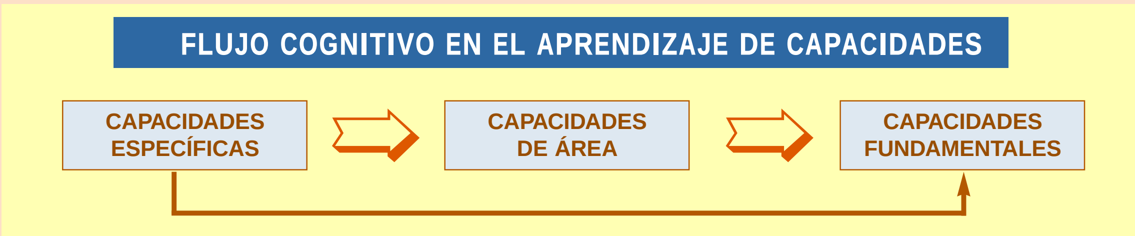
CAPÍTULO II

PROGRAMACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

1. DESARROLLO DE LAS CAPACIDADES Y SELECCIÓN DE CONTENIDOS

– Desarrollo de capacidades:

Mediante el área curricular de matemática, se pretende que los estudiantes de secundaria interpreten, formulen y ***resuelvan problemas*** utilizando: modelos, procedimientos, estrategias, algoritmos y técnicas de cálculo, tanto al investigar como al conjeturar, demostrar, abstraer y generalizar. Se pretende, igualmente que manejen en forma adecuada las nociones de conjunto, relación, función, sistemas numéricos, geometría, estadística y probabilidades, no sólo en la clase de matemática, sino en la vida cotidiana y que, sobre todo, desarrollen al máximo sus capacidades de ***razonamiento y demostración*** y de ***interpretación de gráficos y/o expresiones simbólicas***, así como, la de solucionar problemas. El logro de las capacidades de área enunciadas, deben posibilitar, el logro de las capacidades fundamentales: pensamiento creativo, pensamiento crítico, toma de decisiones y solución de problemas, que se enuncian en el DCB.



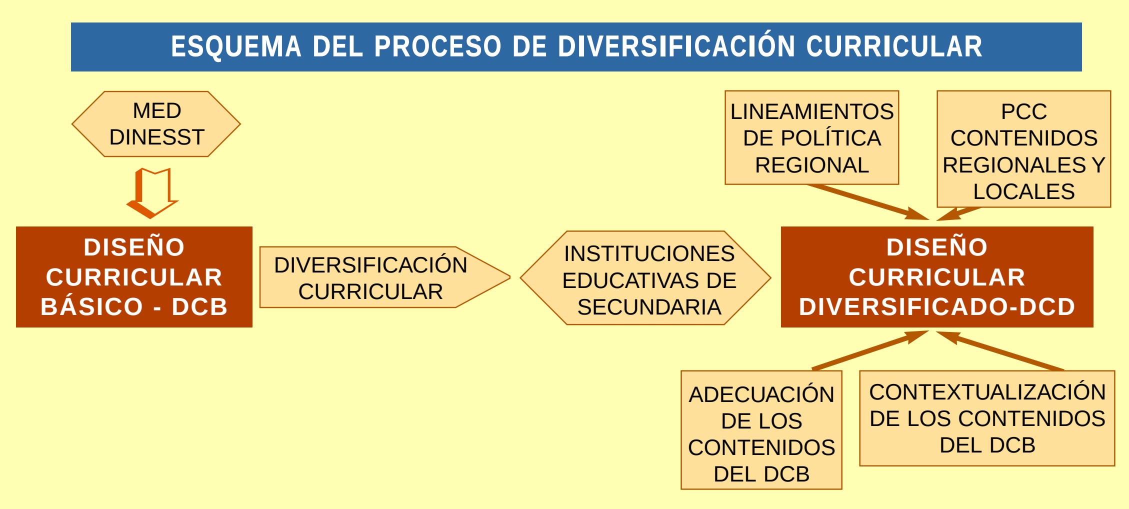
– Selección de contenidos:

El Proyecto Curricular de Centro Educativo (PCC), resultado de la diversificación (adecuación y contextualización) del DCB en función de los intereses y necesidades de los estudiantes, es el referente para la selección de los contenidos de aprendizaje a ser trabajados en el aula de clase. Para ello, deben determinarse las actividades de la unidad, módulo o proyecto de aprendizaje en el que participará el grado y el área de matemática, identificando los contenidos de aprendizaje a ser trabajados en cada una de ellas.

2. DIVERSIFICACIÓN CURRICULAR EN EL ÁREA DE MATEMÁTICA

Al realizar la programación curricular y elaborar las unidades didácticas (unidades, proyectos o módulos) hay que seleccionar y organizar los contenidos de aprendizaje, a fin de garantizar que den respuesta a los retos personales y sociales que plantea la vida y, sobre todo, para adecuarlos y contextualizarlos a la realidad en que se aplicarán. En tal sentido, hay que buscar que sean relevantes y formativos, no por su valor intrínseco en sí, sino como medios para el desarrollo de las capacidades propuestas. Por esa razón será menester tener en cuenta los siguientes criterios básicos al llevar a cabo esta tarea:

- **Relación lógica.** Los contenidos seleccionados, antes de constituirse en una unidad didáctica, deben organizarse con sentido de afinidad, complementariedad, inclusión, integralidad y espiralidad entre sí, a fin de posibilitar su programación en secuencias lógicas que faciliten los pro-



cesos de asimilación, subsunción, acomodación y encadenamiento con otros aprendizajes, por parte de los alumnos.

• **Articulación y pertinencia.** Los contenidos seleccionados han de abordarse, en lo posible, como un todo integrado y no como temas aislados. Las conexiones entre ellos deben constituir una característica visible. Sólo en situaciones especiales algunos contenidos pueden ser estudiados en forma aislada, ya sea por las condiciones peculiares de los estudiantes o por su grado de dificultad. Pero, se buscará siempre, que todo los contenidos sean pertinentes, es decir, que estén debidamente adecuados, dosificados y contextualizados a la realidad de los estudiantes.

• **Temporalidad.** Es necesario prever el tiempo real y efectivo que tomará desarrollar un contenido. Estimar el tiempo aproximado en horas pedagógicas es una práctica sensata. Por ejemplo, si matemática tiene seis horas a la semana y se ha previsto que el desarrollo de una unidad tomará 24 horas de clase, no es lo mismo decir 24 horas que 4 semanas. En la práctica, hay semanas en las que se pierden horas de clase porque hay feriados o alguna actividad con suspensión de labores, y eso, debe tenerse en cuenta.

3. DISEÑO DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

La programación curricular se realiza mediante unidades didácticas. Estas pueden ser de tres tipos: unidad de aprendizaje, proyecto de aprendizaje y módulo de aprendizaje. Todas, deben orientarse al logro de CAPACIDADES y deben programarse en función de APRENDIZAJES ESPERADOS. Es posible que éstos se hallen previstos en el PCC o que se encuentren en los libros de texto. Sin embargo, será necesario revisarlos y programarlos simplemente como **actividades de aprendizaje**, concordándolas con los intereses y las necesidades de los estudiantes y para el contexto en que se dan.

Las unidades didácticas permiten al docente organizar el trabajo de sus alumnos para posibilitar que ellos se apropien de los conocimientos matemáticos como un todo integrado, reconociendo su relevancia y su utilidad, tanto para comprobar cómo una idea matemática ayuda a entender otras, y cómo puede utilizarse para resolver problemas, describir y modelar fenómenos del mundo real.

Estrategias para planificar actividades de aprendizaje. Cualquiera que sea la forma que adopte una unidad didáctica – unidad de aprendizaje, proyecto o módulo – su contenido estará siempre referido a situaciones o actividades que favorezcan el logro de los APRENDIZAJES ESPERADOS previstos, los mismos que, a su vez, deben garantizar el logro de las capacidades – específicas, de área y fundamentales - que se consideran en el DCB y las que surjan de la diversificación curricular.

Sin embargo, justamente para poder identificar y definir mejor esos aprendizajes esperados, es necesario tener en cuenta algunos factores o procesos que los regulan o favorecen. Ese es el caso, por ejemplo, de:

- **La experimentación.** Porque permite aprendizajes por descubrimiento y por construcción individual y grupal, que resultan siendo, por lo general, de tipo significativo. Los estudiantes deben tener la oportunidad de expresar sus conocimientos previos y sus propias experiencias, para construir, sobre esa base, sus nuevas experiencias.

- **La observación.** Porque permite centrar la atención en un objeto o en una situación determinada para obtener información, permitiendo identificar la misma situación y la descripción de sus elementos, así como, los cambios producidos en ella.

- **La manipulación.** Porque cumple un papel crucial en la configuración de las estructuras mentales que posibilitarán o dificultarán, más tarde o más temprano, los aprendizajes de aspectos abstractos o generalizaciones. Si un estudiante de secundaria carece de este prerrequisito, es decir, no puede asimilar abstracciones, se le tiene que proporcionar experiencias intuitivo concretas que hagan posible la configuración de sus propias estructuras mentales.

- **La relación.** Porque para la construcción de una idea o un concepto es ne-

cesario clasificar nuestras experiencias a partir del establecimiento de conexiones o relaciones entre los contenidos de dos más objetos matemáticas o actividades en general.

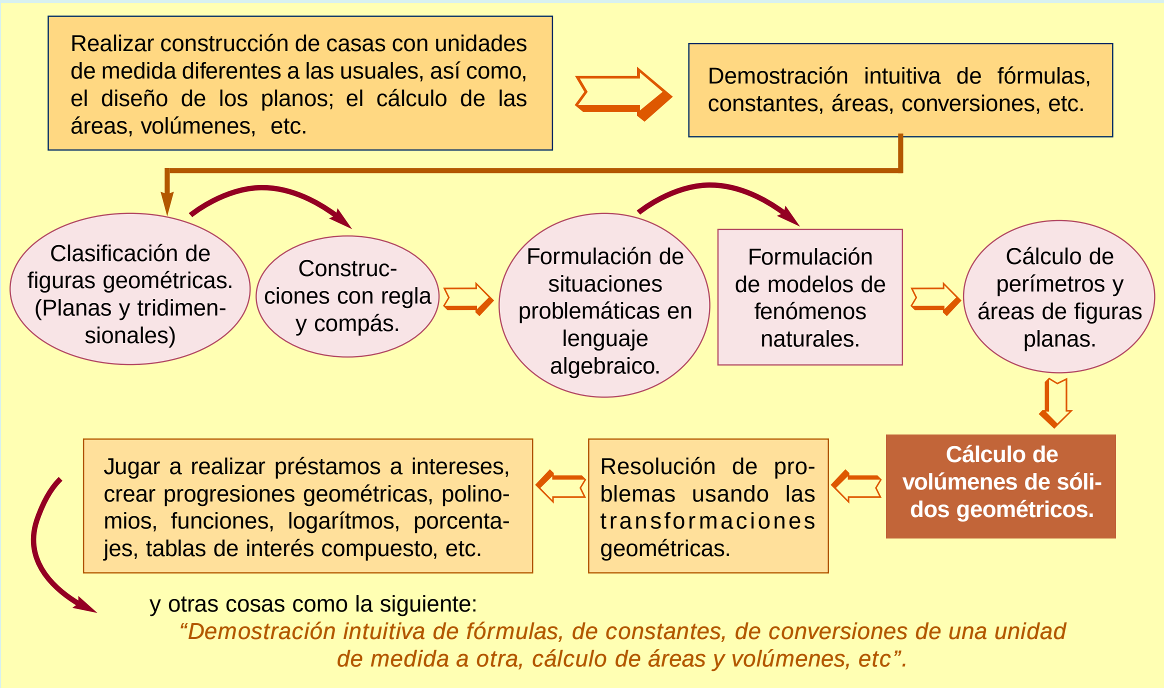
- **Las rutinas algorítmicas específicas.** Muchos temas matemáticos requieren del desarrollo de técnicas específicas, así como de hábitos y acciones mentales predeterminadas. Los algoritmos como "formas de hacer", cumplen un papel importante e insustituible en el aprendizaje de la matemática.

- **Las estrategias heurísticas (genéricas o específicas).** El proceso de resolución de problemas es fundamental en la educación secundaria del mismo modo que el proceso de elaboración de modelos. Ejemplo:

Diseñar modelos sobre la dinámica poblacional y la organización de las abejas, o también, establecer progresiones aritméticas, porcentajes, polinomios, funciones crecientes, decrecientes y constantes, función lineal y exponencial, etc. de situaciones, casos o hechos propios de la vida diaria, ayudan a desarrollar el pensamiento matemático.

– **Ejemplos de actividades creativas de aprendizaje:**

Las actividades de aprendizaje se pueden abordar a través de estrategias como la modelación, la resolución de problemas, el método de proyectos, u otros. El profesor de matemática debe conocer y aplicar muchas estrategias para el trabajo con sus alumnos, conociendo el hecho de que hay estrategias que se acomodan mejor que otras, a ciertas actividades.



4. DISEÑO DE UNIDADES DIDÁCTICAS.

La unidad de aprendizaje es, sin duda, el tipo de unidad didáctica con el que se encuentran más familiarizados los docentes de cualquier nivel. Sin embargo, al programarlas deben tenerse en cuenta los siguientes pasos:

– Diagnóstico. Indagar sobre la realidad socioeconómica de los estudiantes, el tiempo disponible para la realización de las tareas en casa, el conocimiento matemático que poseen, el número de alumnos de la clase y el horario del área son determinantes para el planeamiento de unidades didácticas .

Por ejemplo:

- La realidad socioeconómica de los estudiantes, así como sus intereses y metas, son esenciales en la elección del tema a tratar y de la metodología a utilizar para desarrollarla.
- El grado de conocimiento matemático, que permitirá establecer y dosificar los contenidos, así como el énfasis necesario y el número de ejercicios a ser propuestos.
- El horario de trabajo: mañana o tarde, inicio o final de la jornada, por su parte, determinan la dinámica con la que deberá desarrollarse la sesión. No es lo mismo trabajar a la primera hora de la mañana que a la última, ocurriendo a la inversa en la tarde.
- El número de alumnos conduce a la formación de grupos de trabajo, con más o menos elementos, facilitando la orientación de los trabajos.

- La disponibilidad de los estudiantes para las tareas en casa, implica la delimitación de las metas. Los estudiantes que trabajan, por lo general, tienen más facilidad para enfrentar situaciones aplicadas a su trabajo que aquellos que no trabajan; en contrapartida, no disponen del tiempo suficiente para el estudio. En este caso es más conveniente que el trabajo sea hecho solamente en el aula de clase.

– Elección del tema. Para desarrollar UNA CAPACIDAD y los contenidos de aprendizaje de una sesión, se elige un tema o un problema que servirá de marco para entender y usar la matemática. El profesor puede elegir el tema o proponer temas y problemas que elegirán los estudiantes.

La elección por los alumnos tiene ventajas y desventajas. Una ventaja es que se sienten partícipes activos en el proceso. Por el contrario una desventaja puede ser que el tema no sea adecuado para tratar determinados contenidos o puede ser muy complejo, exigiendo un tiempo adicional. Sea cual fuese la forma, el tema o problema adoptado debe estar en sintonía con el conocimiento y las expectativas de los estudiantes.

– Desarrollo de los contenidos de aprendizaje. La sesión de aprendizaje debe dar oportunidad para que los alumnos trabajen individualmente, en pequeños grupos o en grupos grandes, porque en cada uno de esos modos de trabajo se pueden desarrollar diferentes capacidades.

Es necesario también que, al menos la introducción de cada nuevo tema, sea hecha a través de situaciones problemáticas que induzcan a los alumnos a la exploración y formulación de conjeturas, poniéndolos en situación de participar, de descubrir y de jugar en un clima de libertad y sin tensión. Es importante que ellos trabajen no solamente interpretando las situaciones que se presentan sino también construyendo y organizando los contenidos involucrados en esas situaciones.

El material de aprendizaje para una sesión debe comenzar con una situación rica, que contenga varias informaciones y con una invitación a considerar qué otras informaciones pueden ser encontradas a partir de las dadas. Al realizar las actividades consideradas, varios errores y conceptos equivocados pueden aparecer y, de ese modo, el profesor puede ayudar a los alumnos a corregirlos y resolverlos poniendo de manifiesto esos errores a través de discusiones.

Debemos considerar también que un ambiente de respeto mutuo, donde ellos se sientan libres para explorar ideas matemáticas, hacer preguntas, discutir sus ideas y cometer errores es importante para aprender más y mejor. Además la utilización del lenguaje escrito y oral ayuda a clarificar el pensamiento.

– Programación de situaciones de aprendizaje.
Las investigaciones en psicología del aprendizaje y didáctica de la matemática nos indican que, cuando se presentan a los jóvenes situaciones de desafío que tienen sentido para ellos, desarrollan una variedad de estrategias para solucionarlas utilizando el conocimiento que ya tienen en sus razonamientos. Esto implica que hay que proporcionar a los alumnos situaciones adecuadas al desarrollo de problemas matemáticos reales, porque esos problemas les dan la oportunidad para reflexionar y reorganizar sus formas de pensar.

Una situación de aprendizaje se define como un conjunto de interacciones - entre el estudiante y su objeto de aprendizaje, entre los mismos estudiantes, entre el estudiante y el profesor o entre el profesor y el estudiante - que el profesor planifica de manera secuencial y coherente para promover aprendizajes significativos en sus alumnos. Aprendizajes significativos son las capacidades, porque tienen utilidad inmediata.

Gracias a estas investigaciones ahora sabemos que, los cuerpos de conocimientos, procedimientos, destrezas y habilidades mejor asimilados y acomodados en nuestro andamiaje conceptual, son los que están ricamente relacionados entre sí y con el entorno. Además, se sabe que las ideas nuevas no son aceptadas por el alumno hasta que ellas sean tan fuertes que, provoquen por sí mismas, la reorganización de todo el material cognitivo asimilado existente. Debemos entonces, buscar o desarrollar modos de enseñar que contribuyan a que los aprendizajes perduren y se reacomode hasta forma una nueva estructura conceptual.

En suma, en vez de agobiar a los alumnos con múltiples contenidos desconectados, hay que reducirlos a los conceptos esenciales para comprender cada uno de los sistemas matemáticos elegidos para su aprendizaje. Para eso algunos temas que ya estaban en el currículo pasan a ser prioritarios, otros pierden importancia y otros deben ser incluidos. Hoy en día, por ejemplo, la estadística y la probabilidad tienen una gran importancia y no pueden faltar en ningún currículo orientado al desarrollo de la capacidad de pensar.

5. DISEÑO DE SESIONES DE APRENDIZAJE.

En una sesión de aprendizaje, por ejemplo, el docente puede planificar situaciones como:

– Creación de un clima de motivación y confianza. Establecer un clima de motivación y confianza, es de vital importancia para precisar el contexto e identificar los intereses de los educandos. Esto se puede lograr conversando sobre el tema elegido, estableciendo el nexo entre el tema y los intereses de los educandos, así como, precisando las posibles aplicaciones que el contenido matemático a desarrollar podría llegar a tener en la vida cotidiana.

– Problematización de una situación real. Es importante llamar la atención sobre la situación elegida para luego problematizarla. Tal acción implica que, en colaboración con los estudiantes, se determinarán los componentes fundamentales y los demás elementos de la situación, precisando las variables que intervienen en ella y las relaciones que podrían existir entre tales variables. El establecimiento de algunos indicadores, ayuda también en este propósito.

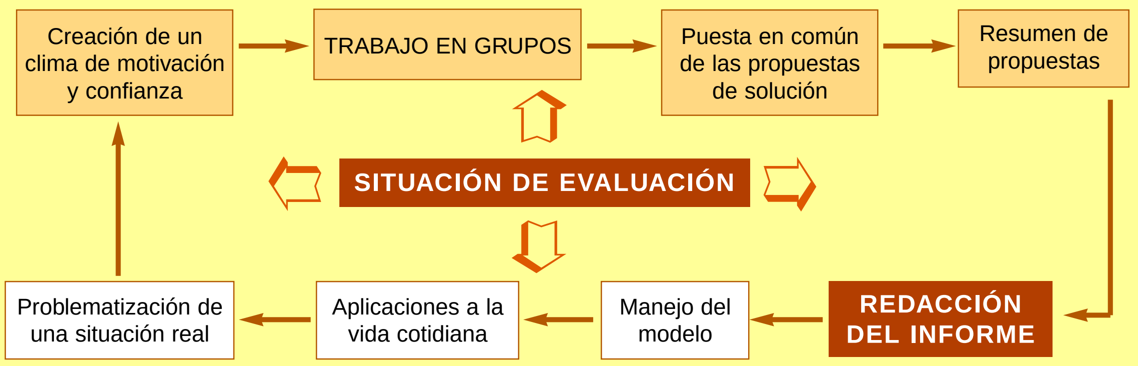
– Trabajo en grupos. Constituir grupos de cuatro a seis alumnos, para luego proponer las reglas de juego, incentivar la discusión de la situación motivo de análisis y controlar que en la discusión participen todos los integrantes del grupo, es una tarea que no se puede soslayar. Igualmente, orientar e impulsar para que cada grupo intente una aproximación a la solución de la situación problemática en estudio, es algo que debe promoverse durante una sesión de aprendizaje .

– Puesta en común de las propuestas de solución. Concluidos los debates grupales, éstos exponen sus aproximaciones de solución obtenidas. El profesor interviene en cada una de esas aproximaciones tratando de extraer lo relevante de cada aproximación e incentivando una profundización de las opiniones, puede sugerir aclaraciones y simplificaciones que conduzcan a una aproximación consensual de las soluciones. Sin embargo, es bueno aclarar que a una solución no se llega por mayoría ni por consenso, sino por lógica, a base de razonamientos consistentes.

– Resumen de las propuestas. A continuación el profesor conduce el trabajo hasta llegar a un resumen que englobe todas las intervenciones y que deje clara la situación problemática en estudio. Los alumnos proponen alternativas para encontrar relaciones entre los componentes que intervienen en la situación. El profesor sugiere la observación de las relaciones hasta lograr que los alumnos encuentren “la mejor” alternativa de solución de la situación.

– Redacción del informe. Los alumnos se organizan para elaborar un informe sobre la situación estudiada. El informe debe contener: El enunciado de la situación, la determinación de sus componentes y variables, las relaciones existentes entre esas variables y componentes, los procesos seguidos para obtener las conclusiones y las alternativas de solución existentes de la situación en estudio, además de un “modelo” de la situación

DIAGRAMA DE FLUJOS DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE QUE SE PUEDEN PROGRAMAR EN EL AULA



– **Manejo del modelo.** Precisado el modelo de la situación en estudio, el profesor propone algunos ejemplos de otras situaciones con el mismo modelo o con algunas variaciones de ese modelo. Los alumnos trabajan las situaciones, explicitando la semejanza o no del modelo, y explicando los procesos seguidos.

– **Aplicaciones a la vida cotidiana.** Los alumnos inventan situaciones diferentes que correspondan al mismo modelo. El profesor motiva o estimula a los alumnos para que las situaciones que inventen se aproximen cada vez más a la vida cotidiana. El profesor propone situaciones de la vida diaria para que los alumnos las analicen, tratando de determinar el modelo que corresponde a cada una, y resuelvan aquellas cuyo modelo lo permite.

– **Situación de evaluación.** Es importante identificar contenidos que presentan dificultades en ser aprendidos. Determinar el grado de comprensión de los conceptos, el grado de aplicación de los procedimientos y observar las capacidades y actitudes desarrolladas por cada estudiante, son las tareas más importantes que deben promoverse para lograr que tengan confianza en si mismos, mejoren su interés por la matemática, perseveren y flexibilicen sus maneras de aprender y argumentar sus ideas.

Si deseáramos, por ejemplo, redactar **“aprendizajes esperados” en base a capacidades fundamentales** para la ejecución del proyecto: “La Tienda Escolar”, podríamos hacerlo del modo que se ejemplifica en la matriz de la página siguiente. Sin embargo, es bueno aclarar que las capacidades presentan ciertos niveles de desarrollo y de consolidación. La capacidad específica de pensar con originalidad y fluidez imaginativa para plantear problemas referidos a operaciones con números, de un estudiante de quinto grado de secundaria, es difícil que se de con iguales características, por ejemplo, en un estudiante de primer grado. En este último será mucho más “gruesa”, menos acabada, menos exquisita, etc, que en la de aquel que ya está por concluir la secundaria. Por un lado, el grado de conocimiento sobre los conjuntos de números en el alumno de 1° grado, sólo alcanza hasta los números racionales, en cambio el de 5° grado llega hasta el conjuntos de los números reales e incluso hasta los números complejos.

MATRIZ DE INTEGRACIÓN DE CAPACIDADES FUNDAMENTALES

PENSAMIENTO CREATIVO	PENSAMIENTO CRÍTICO	SOLUCIÓN DE PROBLEMAS	TOMA DE DECISIONES
Elabora tablas y diseña creativa e imaginativamente, tablas y gráficos sobre compras, ventas y ganancias, junto con una propuesta de publicidad de la "tienda escolar"	Evalúa críticamente las diferentes propuestas de negocios y su influencia en el medio, a partir de las posibilidades y limitaciones reales de una tienda escolar.	Diseña modelos matemáticos para determinar el comportamiento de las ganancias en la "Tienda Escolar", desechando aquellos productos de escasa demanda.	Analiza las diferentes alternativas de negocios, prioriza y selecciona las mejores y decide ejecutar las de menor riesgo y mayor impacto en la comunidad.

Es obvio que no se propone trabajar con capacidades fundamentales, ni con capacidades de área, sino con capacidades específicas. Además, un **aprendizaje esperado**, como puede apreciarse, es un **enunciado** en el cual, debe quedar expresado con mucha claridad y precisión, **el logro que se pretende alcanzar en una sesión de aprendizaje**. En el caso del ejemplo referido a "pensamiento creativo", por ejemplo, puede verse objetivamente que la tarea que tiene que ejecutar el alumno es "elaborar tablas y diseñar gráficos más una propuesta de publicidad", con imaginación y originalidad, rasgos del pensamiento creativo, por lo tanto, lo que tendría que evaluarse es justamente "cuan originales e imaginativos pueden ser la publicidad, las tablas de datos y los gráficos correspondientes que produzca el alumno. Otro tanto ocurre con los demás ejemplos.

– Ejemplo de sesión de aprendizaje

SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. Datos informativos

1.1. C. E. : "JOSÉ CARLOS MARIÁTEGUI" de Paramonga -
1.2. Grado : Primero
1.3. Secciones : "C" y "D"
1.4. Docentes : Pablo Fabián Soto
Paulina Vilcarino Rosas

II. Datos curriculares

2.1. Área : Matemática
2.2. Componente : Sistemas numéricos: fracciones comunes
2.3. Tema : Fracciones
2.4. Tiempo : 180 minutos

III. RESULTADOS ESPERADOS POR EL DOCENTE AL TERMINO DE LA SESION

- ✔ Desarrollar el pensamiento lógico matemático de los estudiantes, mediante su participación en el planteo y la resolución de problemas en las que intervienen números fraccionarios y decimales.
- ✔ Analizar y establecer los mecanismos de aprendizaje por los cuales los estudiantes han llegado a plantear y solucionar, adecuada y eficazmente, problemas sobre fracciones comunes y decimales, tarea considerada normalmente, como difícil y árida.

IV. Organización de contenidos: Fracciones

- ✔ Comparación de fracciones
- ✔ Operaciones con fracciones
- ✔ Números mixtos
- ✔ Problemas sobre fracciones

V. Desarrollo del aprendizaje

– **MOTIVACIÓN.** Se forman grupos de dos integrantes, mediante la técnica "yo soy alumno de 1° año al igual que tú", para ello a cada alumno se le entrega una ficha que contiene algunos términos que se utilizan en las fracciones, pidiéndoles que se agrupen con su compañero que tiene el mismo término en su ficha. Luego se reparte una hoja de trabajo que contiene un problema motivador sobre "el reparto de caballos" y los problemas que los alumnos resolverán en la parte práctica, así como la actividad de extensión.

"El reparto de los caballos"

En circunstancias en que regresaba a su pueblo, un campesino que tenía 36 caballos en total, como todo su patrimonio, fue enterrado por un huayco (avalancha de tierra), donde murió junto con el caballo en el que iba montado.

Días después, sus tres hijos hallaron un testamento que su precavido padre había dejado. En éste, señalaba que dejaba sus caballos para sus tres hijos, asignándole la mitad de los 36 caballos para el mayor, un tercio de los 36 caballos al segundo y un noveno de los 36 caballos, para el menor.

Habiendo muerto uno de los caballos, el reparto tendría que hacerse entonces con los 35 caballos que habían quedado, a fin de cumplir con el testamento. Sin embargo, al intentarlo, no se pusieron de acuerdo los hermanos, debido a que esa cantidad no era posible repartirla con enteros naturales, conforme a lo indicado en el testamento, por lo tanto acudieron a un juez para que resolviera el problema.

El juez logró repartir satisfactoriamente los 35 caballos. ¿cómo lo hizo, sabiendo que no se llegó a sacrificar ningún caballo?

– **ACTIVIDADES BÁSICAS DE APRENDIZAJE:** Los alumnos reflexionarán, debatirán y darán respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿De qué trata el problema?.
2. ¿Cuáles son los datos conocidos y desconocidos?
3. ¿Qué se desea saber según el problema planteado?
4. ¿Se podrá representar gráficamente el problema?
5. ¿Si fueras el Juez, podrías explicar tu estrategia para resolver esta situación problemática?
6. ¿Si los 36 caballos estuvieran vivos, cuánto le hubiera correspondido a cada uno de los hijos? ¿Si sumas las tres cantidades que has obtenido al repartir los 36 caballos entre los tres hermanos, cuánto te da? ¿Existe o no diferencia entre ambas cantidades? (Explica por qué).
7. ¿Puedes realizar la repartición de los 35 caballos y sumar las tres cantidades obtenidas?.
8. ¿Cuánto es la diferencia que existe entre los 35 caballos y la suma de las tres cantidades repartidas? Explica a qué se debe esta diferencia.
9. Si comparas los resultados de las dos situaciones del reparto, en el caso que fueron 36 y 35 caballos, ¿cuál es la diferencia que existe y a qué se debe?
10. ¿Cuál fue la estrategia que usó el juez para dar solución a este problema?
11. ¿El juez que estuvo a cargo del reparto, se benefició con los caballos? ¿Consideras que es justo el reparto? ¿Es correcto el proceder del juez?
12. ¿Podrías sistematizar los pasos que has seguido para resolver esta situación problemática?.

– **ACTIVIDAD DE SISTEMATIZACIÓN DEL APRENDIZAJE**

Los alumnos elaborarán un gráfico, diagrama de flujos o un cuadro en el que señalen los pasos que han seguido para resolver el problema, reflexionando sobre cómo han solucionado sus dificultades.

– **ACTIVIDAD PRÁCTICA O DE APLICACIÓN**

Plantearán y resolverán problemas sobre fracciones, referidos a la vida cotidiana en el lugar donde viven.

– **ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN**

Se sugiere la heteroevaluación para los aspectos cognitivos durante la resolución de los problemas y la coevaluación para la parte actitudinal, la cual se complementará con la entrega de los problemas resueltos.

– **ACTIVIDAD DE EXTENSIÓN. Resolverán el siguiente problema:**

Un explorador aventurero sufre un robo en un lugar desértico y solitario, motivo por el cual se encontraba hambriento y sediento. Por suerte ese día dos campesinos pasaban por ese lugar y lo vieron tumbado en el camino. Los campesinos se compadecieron y le ofrecieron un poco de agua al aventurero y cuando se había repuesto les contó que había sido asaltado por un grupo de delincuentes. El aventurero preguntó a los campesinos si llevaban alguna cosa para comer, a lo cual el primer campesino contestó que aun le quedaban 5 panes y el segundo contestó que le quedaban tres panes. El aventurero propuso que compartan por iguales entre los tres toda esta comida y al llegar a la ciudad les compensaría con 80 soles. Así lo hicieron y durante el trayecto se habían comido entre los tres los ocho panes, estando ya en la ciudad el aventurero les recompenso dándole los 80 soles acordados, por lo que entregó 50 soles al primer campesino y 30 soles al segundo. El primer campesino dijo:

El reparto no es correcto. Si yo di cinco panes me tocan 70 soles y a mi compañero que sólo aportó tres panes, le deben tocar 10 soles. ¿Por qué dijo esto el primer campesino?

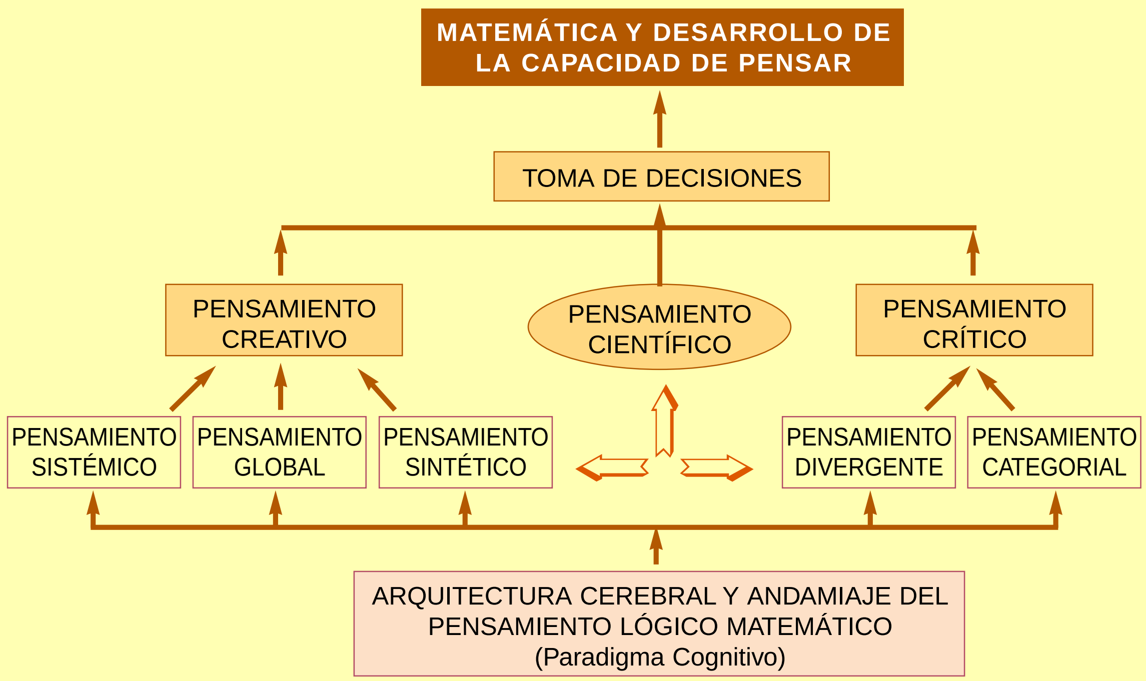
CAPÍTULO III

ORIENTACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE

1. CONSIDERACIONES GENERALES

El trabajo en el aula es un acto complejo cuya eficiencia y eficacia depende, en gran parte, de las personas que intervienen en el proceso y, también, en cierta medida, de las condiciones y factores ambientales locales. Podría afirmarse que la enseñanza es eficiente, si y solo si, son eficientes los profesores. De modo similar, habría un buen aprendizaje si hay buenos alumnos. Sin embargo, al margen de estas disquisiciones, es necesario dejar en claro que la principal tarea del profesor de matemática, en el nivel secundario, es **enseñar a pensar**. Pero para llegar a saber pensar "BIEN", será necesario dominar todas las otras formas de pensar. En el esquema siguiente se puede apreciar cómo la capacidad de solucionar problemas (capacidad de área en matemática) requiere del desarrollo previo de los pensamientos sistémico, global, sintético, divergente, etc., y, obviamente, del pensamiento creativo, el pensamiento crítico y de la toma de decisiones.

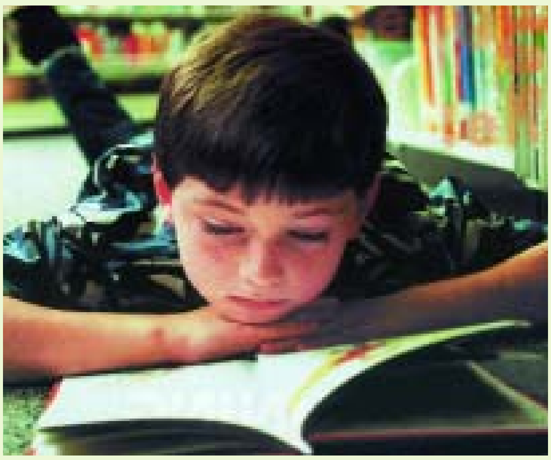
CAPACIDADES FUNDAMENTALES Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA



La matemática ha sido siempre un medio eficiente y eficaz para aprender a pensar. Cada aprendizaje matemático es una cognición. Si sobre eso, reflexionamos sobre cómo hemos aprendido matemática, estaríamos llegando a aprendizajes mucho más complejos como las metacogniciones. Entonces, la matemática sirve también para aprender a aprender, porque se aprende equivocándose, por ejemplo, más de lo que se aprende acertando.

El pensamiento matemático es una forma del pensamiento científico, pero éste, a su vez, se interrelaciona con el pensamiento creativo y con el pensamiento crítico. No habría pensamiento matemático si este no fuera, también, creativo y crítico. Sin embargo, para que todo estos pensamientos se integren, es necesario desarrollar las formas de pensamiento subyacentes tales como: el pensamiento sistémico, el pensamiento global, el pensamiento sintético, el pensamiento divergente y el pensamiento categorial, entre otros.

Al margen de lo manifestado, todos sabemos que la enseñanza es importante, pero el aprendizaje es un proceso intencional y de carácter decisional: **¡aprende la persona que quiere aprender!**. Además, hasta donde se sabe, no existe método o estrategia alguna que permita lograr que una persona aprenda si no quiere aprender. Sin embargo, es evidente que un proceso participativo de aprendizaje, es preferible a otro meramente receptivo, pasivo, asimétrico o unilateral. De hecho, en una situación ideal, el profesor sería solamente una especie de partera espiritual; es decir, el que ayuda a dar a luz, el que da la oportunidad a los alumnos de descubrir por si mismos las cosas a ser aprendidas. Este ideal es difícilmente alcanzado en la práctica, sobre todo, por falta de tiempo. Con todo, igualmente un ideal puede guiarnos indicándonos la dirección a seguir. Quizás nadie haya encontrado la Estrella Polar, pero muchas personas encontraron el rumbo y llegaron a su destino, guiándose por ella.



El aprendizaje consiste en parte de *"información"* y en parte de *"know-how"* que no es otra cosa que la destreza o habilidad para trabajar con informaciones y para usarla con un propósito dado. También puede ser descrito como un "compendio de actitudes mentales apropiadas" y, en última instancia, como la habilidad para trabajar metódicamente. En Matemática, *know-how* es la habilidad para resolver problemas, construir demostraciones y examinar críticamente soluciones y demostraciones. Y es justamente por eso, que es mucho más importante que la simple adquisición de informaciones.

2. ESTILOS DE ENSEÑANZA

Los profesores tienen sus propios estilos de enseñanza. No hay dos profesores que tengan el mismo estilo y que, en consecuencia, enseñen igual. Ese estilo, a su vez, según una investigación realizada por Juan Ansión y Fanny Cano, para el Proyecto "Escuela, Ecología y Comunidad Campesina" (1,991), es copiado de los profesores que más les impresionaron en ese sentido, durante su escolaridad. Pero, como cada profesor busca personalizar y configurar su propio estilo, lo que hace, según la investigación ya citada, es integrar en uno nuevo, varios estilos que le impactaron positivamente, para después adecuarlo a sus propias características personales y, finalmente, incorporarlo a su propia práctica, como suyo. La teoría de Alberto Bandura en torno al "aprendizaje por modelos", en este caso, se verifica casi a cabalidad.

Si usted no está conforme con los resultados de esa investigación, haga una metacognición sobre su propio estilo. ¿Cómo se originó éste?. ¿Ud. lo construyó de la nada?. Posiblemente no. De lo contrario, haga una pequeña encuesta entre sus compañeros. Se sorprenderá con los resultados que obtendrá.

Sólo en la enseñanza de la matemática en secundaria, se puede encontrar infinidad de estilos de enseñanza. Hay de los docentes que enseñan con mucho rigor y con muchos ejercicios y prácticas, hasta aquellos que dictan los teoremas de un libro, para que el alumno los aprenda de memoria. ¿Quién no se acuerda de su profesor de matemática en secundaria?. Sin embargo, la práctica pedagógica debe renovarse constantemente, y ... los estilos, también. Los tiempos actuales necesitan de profesores que valoren el esfuerzo personal de sus alumnos, siendo lo fundamental el trabajo de investigación que éstos puedan realizar, junto con la aplicación de las técnicas metodológicas y algoritmos con las que el profesor les irá apoyando. Es bueno saber que tal trabajo de facilitación puede dinamizarse con las actividades siguientes:

- La relación frecuente de referentes no simbólicos con los conceptos, de manera que se promueva la multivariedad de representaciones.
- El progreso desde la intuición hasta el conocimiento matemático, con itinerarios diversos que faciliten el seguimiento de las actividades, según los ritmos y las capacidades personales.
- La comunicación como elemento clave que ayuda a superar dificultades individuales y que colabora en la construcción de los conceptos.
- Fomento de actitudes positivas en relación con el trabajo, basado en presentaciones próximas, significativas y atractivas.
- Trabajo grupal cooperativo con promoción de valores globales de aprendizaje.
- Integración con la realidad cotidiana, no sólo como referente fundamental fenomenológico, sino también como manera de valorar la relación con el medio. Esto se puede hacer por medio de situaciones de aprendizaje como las siguientes:

- Presentar a los alumnos sin importar su edad **propuestas de trabajos personales o grupales**, que les permitan organizarse en grupos flexibles y dinámicos.

- Organizar para los alumnos **trabajos en grupos, de investigación o de "laboratorio"**, en los que se desarrollen técnicas como el guión de trabajo o la "ficha tutorial", con reflexiones que se van incorporando sucesivamente en los momentos que se consideran convenientes, para cultivar tanto capacidades, destrezas y habilidades de tipo procedimental como la práctica de valores como: la comunicación horizontal y democrática, la cooperación, la socialización, etc.)
- **Resolución de problemas.** Con este tipo de actividades el propósito no es concluir los procesos asociados; pero se procura promoverlos como objetivos, por medio de la analogía, el análisis de los enunciados, el uso de los diversos lenguajes de la matemática y una mejora en la capacidad de resolución de problemas, la cual se convierte en "método de trabajo" en diversas ocasiones.
- Desarrollar **trabajos de elaboración de modelos y construcción**, por ser uno de los aspectos más importantes del trabajo matemático. En este caso, se parte de elementos sencillos y se va hacia el descubrimiento de propiedades, o bien, se procura el análisis de situaciones simples (regularidades) para de allí pasar al

análisis de congruencia, simetría y otros de similar o mayor complejidad.

- **Trabajo de reflexión histórica.** Se promueve con unidades en las que se combina el conocimiento de realidades (por medio de cómics, explicaciones verbales, búsqueda de información etc.) y la "repetición de experiencias históricas" al estilo del laboratorio.

- **Trabajo de lenguaje-comunicación.** En muchas actividades se propone el diálogo y la confrontación de ideas y teorías, como método de superación de conflictos y obstáculos epistemológicos.
- **Elementos de síntesis colectiva.** Que deben facilitar la reflexión y la consolidación de los elementos factuales y de procedimientos. Se hacen tanto por medio de esquemas como de pequeñas unidades preparadas para eso.

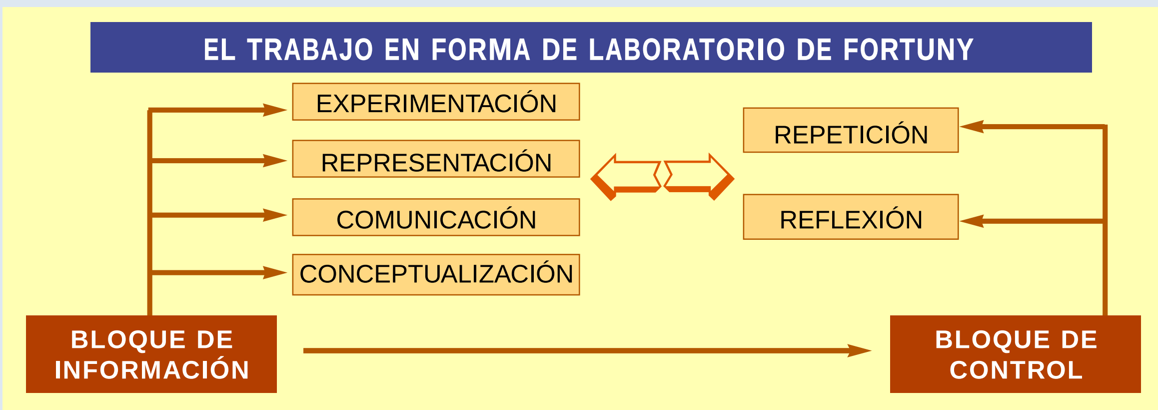
En tanto sea posible, el proceso de trabajo en las diversas actividades se orientará en forma de laboratorio, proponiendo dos bloques en seis fases (Fortuny, 1990), que se presentan a continuación.

- **Bloque de información:** Experimentación, representación, comunicación y conceptualización.
- **Bloque de control:** Repetición y reflexión, hacia una nueva experimentación.

En la primera fase del bloque de información, se promueven elementos de motivación que permitan llegar a observar una situación concreta, de preferencia, ligada a un contexto real. Después se proponen situaciones de representación del fenómeno, es decir de sistematización de la experiencia, para luego pasar a la fase de comunicación de los resultados en grupos, para arribar a la conceptualización final. Cualquiera de las fases puede ser objeto de repetición.

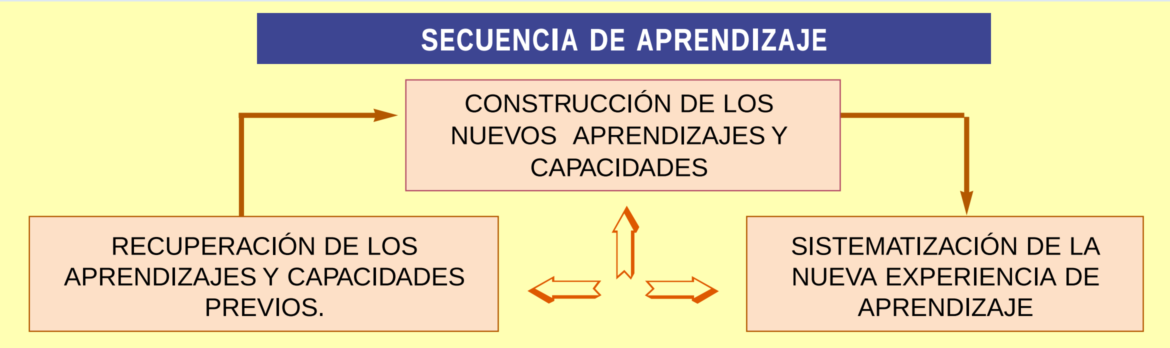
Es posible que algunos docentes no consideren atractivo trabajar con seis fases y dos bloque. Se presenta para ellos, entonces, dos modelos de aprendizaje de tres fases básicos. Uno es el propuesto por Fortuny (esquema al final de la página) y el otro basado en los tres momentos siguientes.

a. RECUPERACIÓN DE APRENDIZAJES Y CAPACIDADES PREVIAS. En este momento el profesor indaga y verifica, con las técnicas que prefiera, lo que saben los alumnos acerca del "aprendizaje esperado" que piensa desarrollar en la sesión. También en este momento, motiva y crea el clima apropiado de trabajo.



b. CONSTRUCCIÓN DE LOS NUEVOS APRENDIZAJES Y CAPACIDADES. Sobre la base de los aprendizajes previos recuperados en el momento anterior, se construye en un proceso de creación colectiva y democrática, el nuevo aprendizaje, utilizando diversas estrategias y técnicas.

c. SISTEMATIZACIÓN DE LA NUEVA EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE. Este es el momento en que se organiza el aprendizaje mediante alguna técnica de asimilación cognoscitiva o de tipo metacognitivo. El resultado de este momento debe ser la adquisición de un aprendizaje significativo, que permita al educando, iniciar su práctica transformadora de la realidad en que vive.



3. ACTITUD FRENTE AL ERROR

El borrador es un instrumento que sirve para desaparecer los errores e impedir que el profesor tome conocimiento de ellos. Debemos, por tanto, "desaparecer" el borrador de algunas actividades de Matemática, esto es, adoptando el uso exclusivo de lapicero y orientando a los alumnos en cuanto a los procedimientos ante el error, sin hacer borrones para esconder el error, **concientizándolos de que es importante detectar el error, no para desaparecerlo, sino para repararlo.**

Detectadas las causas, el profesor indicará un tratamiento adecuado, muchas veces acompañado por un saludable régimen de ejercicios básicos diarios, bien dosificados. Así los alumnos se irán fortaleciendo en su práctica de resolver operaciones elementales y en los contenidos consiguientes.

Sin embargo, el régimen de tareas diarias deberá ser cumplido sin disculpas como: yo no sabia, yo no conseguí, yo trabajo, yo ayudo en mi casa, no tuve tiempo, etc. Si un estudiante no cumple su tarea, deberá hacerlo de todas maneras y el ejercicio errado debe ser corregido oportunamente y rehecho por segunda o tercera vez, sin desaparecer el anterior, a fin de poder aprender del error.

4. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS SUGERIDAS.

– El aprendizaje activo por solución de problemas

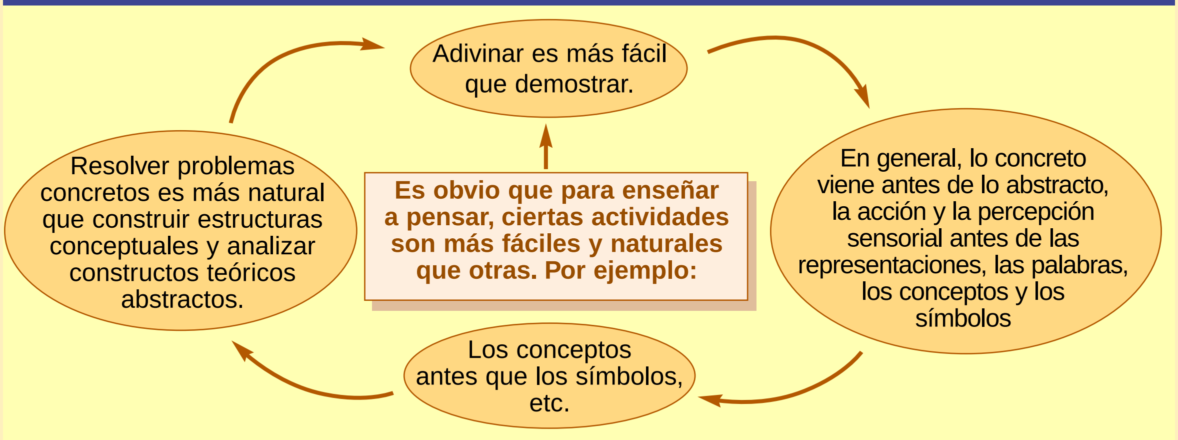
"Para que el alumno aprenda en forma eficaz **debe descubrir, por si solo**, cuánto sea posible de la materia enseñada". Dadas las circunstancias actuales, es preferible esta fórmula basada en el principio del aprendizaje participativo por ser, además, el más antiguo (puede ser encontrado en Sócrates) y el menos controvertido. La matemática no es un deporte para espectadores ya que no puede ser apreciada y aprendida sin participación activa, de modo que el principio de aprendizaje activo es particularmente importante para todos los profesores de matemática – y para los que no lo son, también - tanto más, si se piensa con ella, enseñar a pensar.

Y, ya que el alumno debe aprender no receptivamente sino por su propio esfuerzo, comencemos en el lugar donde el esfuerzo es menor y el resultado más comprensible. Para ello, el alumno debe familiarizarse inicialmente con lo intuitivo concreto (materiales educativos, objetos reales, el ambiente), posteriormente con lo gráfico representativo (etiquetas, esquemas, grafos), para llegar finalmente a lo abstracto; es decir, a lo conceptual y simbólico (leyes, principios, teorías, conceptos, fórmulas).

Este procedimiento debe conducir – inequívocamente - a la resolución de problemas, que es la actividad matemática más próxima al desarrollo del pensamiento lógico. Tendremos un problema siempre que busquemos los medios para alcanzar un objetivo. De modo similar, cuando tenemos un deseo que no podemos satisfacer inmediatamente, pensamos en los medios que lo hagan posible e, igualmente, se tiene allí un problema. La mayor parte de nuestra actividad pensante que no sea, simplemente, soñar despierto, se ocupa de aquello que deseamos y de los medios para obtenerlos, es decir, de problemas.

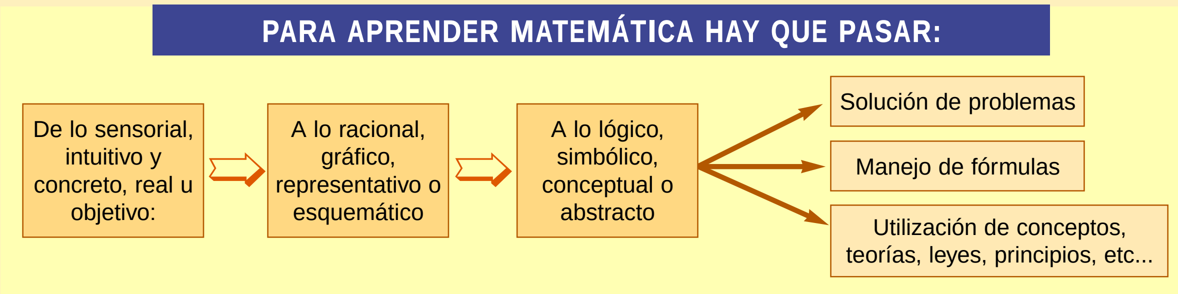
Muchas veces, los problemas cotidianos conducen a problemas matemáticos simples, pero; el profesor con un poco de habilidad, puede hacer más fácil y natural al alumno, el paso de la abstracción teórica existente entre el problema cotidiano y el problema matemático. Y, como los problemas de todos los días son el centro de nuestro pensamiento cotidiano, se puede esperar que los problemas matemáticos estén en el centro del aprendizaje enseñanza de la matemática.

CÓMO ENSEÑAR A PENSAR DESDE LA MATEMÁTICA



En todos los tiempos, el planteo y la resolución de problemas, ha sido la espina dorsal de la Matemática. Esa costumbre se sabe que viene desde la época del Papiro Rhind. En ese sentido, la obra “Elementos” de Euclides puede ser considerada como una proeza pedagógica: dividir el gran tema de la Geometría en problemas manejables didácticamente. Con este antecedente, en la educación secundaria la resolución de problemas, también debe ser la espina dorsal del trabajo educativo, por obvias razones.

Ciertamente, otras cosas deben ser presentadas también en el nivel secundario: demostraciones matemáticas, la idea de un sistema axiomático y, tal vez, una mirada a la filosofía subyacente de las demostraciones y las estructuras matemáticas. Mientras estos asuntos estén más distantes del pensamiento habitual, no podrán ser apreciados o igualmente comprendidos por los alumnos, de allí la necesidad de iniciarlos en ellos.

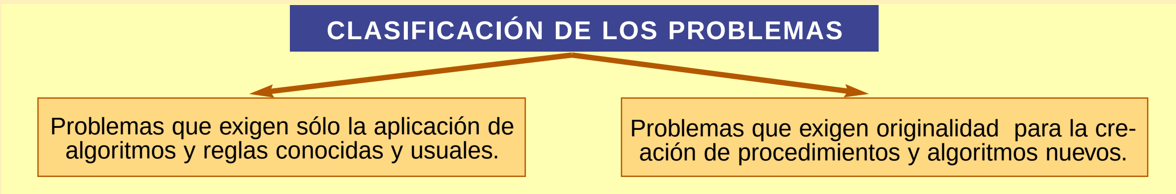


– **Clasificación de los problemas** Hay problemas y problemas, y toda una suerte de diferencias entre problemas. Sin embargo, la diferencia más importante para el profesor es la que existe entre los problemas de rutina y aquellos que no lo son. El problema que no se resuelve por rutina exige cierto grado de creación y originalidad por parte del alumno, mientras que el problema de rutina no exige nada de eso.

Es verificable que el problema resuelto sin rutina, tiene más posibilidades de contribuir al desarrollo intelectual del alumno, mientras que los problemas rutinarios no tienen ninguna. La línea de demarcación entre esos dos tipos de problemas puede no ser precisa, sin embargo, los casos extremos son claramente reconocibles.

La necesidad de ser didácticos y ágiles en este documento, permite sólo realizar una descripción muy sucinta sobre los dos tipos de problemas rutinarios existentes: el problema que exige tan solamente la aplicación de una regla bien conocida y el problema que no es sino una simple cuestión de vocabulario.

En el primer caso, un problema puede ser resuelto aplicando directa y mecánicamente una regla, que el alumno no tendrá ninguna dificultad en verbalizar y ejecutar, la misma que será operada “debajo de la nariz del profesor” o “como una parte del manual”. No hay ninguna originalidad en ello, ni mucho menos aplicación de alguna forma de imaginación y creatividad, tampoco constituye ningún desafío a la inteligencia. En consecuencia, lo que se puede obtener de tal problema es, apenas cierta habilidad para manejar reglas, o sea, un pedacito aislado e insignificante del conocimiento mecánico.



Sabemos que los libros y las clases de matemática están llenas de estas cosas, pero; si el profesor es inteligente, con una pregunta oportuna y bien formulada, podría verificar si el alumno está utilizando correctamente un término o un símbolo del vocabulario y la simbología matemática recién introducida, mientras realiza una práctica de esta naturaleza. Sin embargo, habría que tener cuidado de que el alumno no responda inmediatamente la pregunta, es decir, sin pensar o mecánicamente, ya que, de hacerlo así, no habría una centella de inteligencia o invención, quedándose solamente en una cuestión de manejo de vocabulario.

Los manuales “tradicionales” de matemática son duramente criticados en nuestros días, pero; la mayoría parece no notar lo

Los problemas que se resuelven aplicando RUTINAS, es decir: reglas conocidas	CONDUCEN →	A la verbalización de los problemas pero no al desarrollo de la CAPACIDAD de PENSAR

POR LO TANTO: NO SIRVEN PARA CASI NADA, CON EXCEPCIÓN DE LOGRAR EL CONTROL DE AUTOMATISMOS POR EL LÓBULO IZQUIERDO DEL CEREBRO.

que constituye su mayor defecto: casi todos sus problemas son problemas rutinarios del primer tipo descrito. En cuanto a los manuales "modernos", éstos contienen, por lo general, capítulos enteros repletos de términos y símbolos nuevos, sin ninguna relación con la experiencia y el conocimiento matemático del alumno y de los cuales, por consiguiente, él no puede hacer ningún uso serio; sobre eso, los problemas de fin de capítulo son problemas rutinarios, particularmente chatos, la mayor parte de ellos, reducidos a simples cuestiones de vocabulario.

En esta perspectiva de las cosas, el "servicio" prestado al alumno es de la misma naturaleza, en los dos casos. No hay mucho que escoger entre "tradicional" y "moderno" si la elección está entre una rigidez estricta en uno de los casos y, un exceso de palabras sin ligazón con los hechos, en el otro.

Además de lo expresado, no sería relevante explicar lo que es un problema matemático no rutinario, a alguien que nunca resolvió alguno, que nunca experimentó la sensación y el triunfo del descubrimiento y si, nunca tuvo la inteligencia necesaria para observar la tensión y la alegría en alguno de sus alumnos, cuando logró solucionar un problema considerado "difícil".

– La elección de los problemas La resolución de un problema no rutinario puede exigir mucho esfuerzo del alumno; sin embargo, él no hará tal esfuerzo si no tiene razones para eso y si no está motivado adecuadamente. Pero, en este caso, la mejor motivación es el mismo problema, razón por la cual, debemos tener bastante cuidado en la elección de problemas interesantes y desplegar mucha inteligencia para tornarlos atrayentes.

Para comenzar, el ***problema debe tener sentido y tener un propósito***, además de estar relacionado de modo natural con cosas familiares y servir a un fin comprensible para el alumno. Si para él, el problema parece no tener relación con lo que le es habitual, la afirmación del profesor de que el problema será útil más tarde no es sino una pobre compensación. Un profesor que asistió a una conferencia relató la siguiente observación de uno de sus alumnos de 15 años: "Hasta ahora sé resolver todos los problemas, más no veo ninguna razón del mundo para hacerlo".

No solamente la elección sino también la presentación del problema merece nuestra atención. Una buena presentación evidencia relaciones con cosas familiares. El principio de la enseñanza activa sugiere, en ese sentido, un pequeño truco muy útil: comenzar no por el enunciado completo del problema, sino por sugestiones apropiadas y dejar a los alumnos el cuidado de una formulación definitiva.

– **Conducir al descubrimiento.** La idea deber nacer en la mente del alumno y el profesor debe actuar como partero; la metáfora es antigua - *ella se debe a Sócrates* - pero no obsoleta. Si encaramos el desarrollo de la inteligencia del alumno como el objetivo principal - *o uno de los más importantes* - de la enseñanza a nivel secundario y el trabajo del alumno como el más importante - *o uno de los más importantes* - para conseguir este objetivo, entonces la principal - *o más importante* - preocupación del profesor debería ser la de conducir al alumno a descubrir la solución por si mismo.

Y la primerísima cosa, cuando se trata de ayudar al alumno, es no ayudarlo demás: él debe hacer lo máximo posible por si solo. El profesor debe evitar una interferencia excesiva en el nacimiento natural de una idea.

Sin metáforas: al ayudar al alumno, el profesor debe dar solamente una ayuda *interior*, esto es: sugestiones que podrían haber nacido en la mente del propio alumno, y evitar una ayuda exterior, esto es: evitar dar porciones de solución que no tengan relación con lo que pasa en la mente del alumno.

Es más importante dar una ayuda "inferior", pero eso no quiere decir que sea fácil hacerlo eficazmente, ya que ello exige de parte del profesor un buen conocimiento tanto del problema cuanto del alumno. Y lo primero que se debe tener en cuenta es que, cuando se trata de ayudar al alumno, no hay que ayudarlo demás.

5. EL JUEGO Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña física, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo del pensamiento matemático.

Las diferentes partes de la matemática tienen sus piezas, los objetos de los que se ocupa, bien determinados en su comportamiento mutuo a través de las definiciones de la teoría. Las reglas válidas de manejo de estas piezas son dadas por sus definiciones y por todos los procedimientos de razonamientos admitidos como válidos en el campo. Cuando la teoría es elemental, estos no son muchos ni muy complicados y se adquieren bien pronto, lo cual no quiere decir que el juego sea trivial. Elemental quiere decir cerca de los elementos iniciales y no necesariamente simple. Existen problemas elementales desproporcionadamente complicados con respecto a su enunciado.

¿Se pueden utilizar los juegos matemáticos con provecho en el aprendizaje de la matemática? ¿De qué forma? ¿Qué juegos? ¿Qué metas pueden alcanzarse a través de los juegos?

Los juegos tienen un carácter fundamental de pasatiempo y diversión. Para eso se han hecho y ese es el cometido básico que desempeñan. Por eso es natural que haya mucho recelo de su empleo en la enseñanza.

Mas bien, ese mismo elemento de pasatiempo y diversión que el juego tiene, esencialmente, debería ser un motivo más para utilizarlo generosamente. ¿Por qué no paliar la mortal seriedad de muchas de nuestras clases con un sonrisa? Si cada día ofreciésemos a nuestros alumnos, junto con el "rollo" cotidiano, un elemento de diversión, incluso, aunque no tuviese nada que ver con el contenido de nuestra área, el conjunto de nuestra clase y de nuestras mismas relaciones personales con nuestros alumnos variarían positivamente.

Es claro que no todos los juegos que se encuentran en los libros de recreaciones matemáticas se prestan igualmente al aprovechamiento didáctico. Muchos son solamente charadas y acertijos ingeniosos. Muchos otros se basan en la confusión intencionada del enunciado, dejando una impresión de mera tomadura de pelo. En otros casos la solución da la impresión de haber llegado por revelación divina que no cabe fácilmente en un esquema de pensamiento que puede conducir a un método. Pero, hay juegos que de forma natural, resultan asequibles a una manipulación muy semejante a la que se lleva a cabo en la resolución sistemática de problemas matemáticos y que encierran lecciones profundamente valiosas.

– La Heurística La heurística, como método de cognición, consiste en un conjunto de caminos, formas, modos, medios, procedimientos, técnicas y maneras para llegar al descubrimiento y la invención. Se ocupa, por lo tanto, de la resolución de problemas, es decir, de esas etapas que se presentan naturalmente con frecuencia y que tienen alguna probabilidad de conducirnos a la solución. No es un género de estudio muy usual; aunque Descartes y Leibniz ya habían meditado sobre ello (Leibniz llamaba heurística al "arte de la invención").

Sin embargo, en la perspectiva de enseñar a pensar, las ideas más simples de la heurística serían las más importantes para el profesor, el mismo podría, aplicando esta manera de desarrollar el pensamiento y de conocer, extraerlas de su propio caudal de experiencias, empleando simplemente su sentido común, a pesar de Descartes haya observado que "el sentido común o buen sentido" no sea el más común de los sentidos.

He aquí una sugerencia sobre el tratamiento de problemas diarios que, tal vez, parezcan absolutamente triviales a simple vista.

- Enfrente su problema si quiere resolverlo o pregúntese, *¿qué es lo que quiero, realmente?*. Cuando sepa la respuesta y si ella está clara, examine todo lo que se encuentra a su disposición y lo que usted podría utilizar en situaciones similares posteriores. Luego, pregúntese otra vez: *¿qué es lo que tengo?*. Después de haber examinado durante un tiempo todo lo que tuviera posibilidad de ser usado, puede volver a la primera cuestión y ampliarla: *¿qué es lo que quiero? ¿cómo podré obtenerlo? ¿dónde podré obtenerlo?*, etc. Interrogándose así, podrá aproximarse a la solución del problema.

Pareciera trivial detenerse a observar que los problemas cotidianos presentan ciertas analogías con los problemas matemáticos. Pero, si el profesor intenta dar una ayuda "interior" a un alumno interesado sobre un problema matemático, puede hacerlo con provecho, utilizando las preguntas precedentes o mediante preguntas paralelas, pero; expresándolas en términos matemáticos.

El profesor igualmente puede preguntar: *¿qué quiere usted? ¿cuál es la incógnita?* Si el objetivo de la investigación de la incógnita estuviera suficientemente claro para el alumno, el profesor podrá continuar: *¿qué tiene usted, cuales son los datos, cuál es la condición?*, etc. Si el alumno diera respuestas suficientemente claras también a estas cuestiones, el profesor podrá volver a su pregunta inicial y desarrollará: *¿qué quiere obtener? ¿cuál es la incógnita ¿cómo puede obtener esta incógnita? ¿con qué datos puede determinar este tipo de incógnita?* Es obvio que estas preguntas tienen bastante posibilidad de movilizar en la mente del alumno, los pensamientos y conocimientos apropiados hasta conducirlo a la solución.

Estas preguntas son ejemplos de aplicación de la heurística en forma práctica y con buen sentido. El profesor puede utilizarlas, de arranque, en los casos donde ellas fácilmente sugieran la idea correcta del alumno. Después, él podrá utilizarlas cada vez más, tan frecuentemente cuanto el discernimiento y el tacto lo permitieran. Con el tiempo el alumno podrá comprender el método y usar, él mismo, estas preguntas: aprenderá, así, a dirigir su atención a los puntos esenciales, cuando se encuentre delante de un problema. De este modo, adquirirá el hábito del pensamiento metódico que es el mayor beneficio a ser extraído de las aulas de matemática.

– Metodología para formular problemas Los problemas se constituyen no solo en verdaderos medios de comprobación y aplicación de las capacidades, destrezas y hábitos adquiridos en el desarrollo del área de matemática, sino también en el medio para aprender conceptos y procedimientos. Permite poner en acción todos los recursos teórico-prácticos hasta esa fecha adquiridos por el estudiante.

La solución de un problema conlleva un proceso de descubrimiento. Por modesto que sea un problema, pone a prueba la inventiva del alumno y su solución produce el encanto del descubrimiento y la satisfacción del triunfo, situaciones que producen huellas profundas en el desarrollo del pensamiento y la personalidad del alumno.

Para llegar a hacer un uso óptimo de las posibilidades didácticas que ofrece un problema, para desarrollar la capacidad de pensar:

Los problemas deben ser formativos y deben permitir desarrollar una o más capacidades en el alumno. No sólo deben constituir un refuerzo del aprendizaje, sino que deben abrir perspectivas nuevas de aprender a aprender.

Los problemas deben ser significativos con respecto al tema donde están propuestos. Nada más pernicioso en este sentido, que caer en la trivialidad de los problemas que terminan por anular la iniciativa, el interés y la inventiva del alumno.

Los problemas deberán ser debidamente graduados de menor a mayor dificultad. Muchas veces adoptan un carácter secuencial de tal modo que la solución de uno de ellos permite abordar otro de mayor complejidad.

En algún momento es conveniente, también, plantear problemas cuya resolución es dudosa.

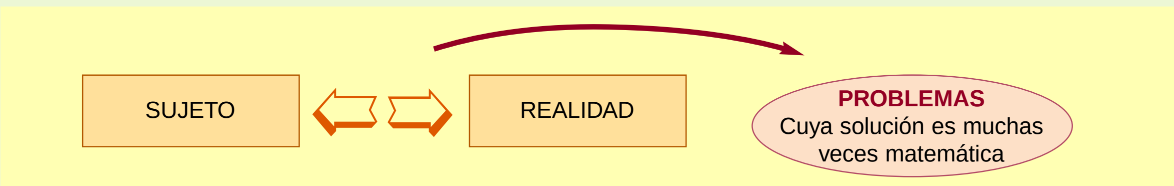
Los problemas deben versar, en lo posible, sobre datos y asuntos conectados con su realidad, con su medio ambiente. Hay tantas formas sugerentes de elaborar problemas para los aspectos operacionales como para otros de carácter eminentemente teórico.

6. IMPORTANCIA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Apreciaciones famosas sobre la importancia de la resolución de problemas

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de la matemática en el mundo que les rodea.

- El párrafo 243 del Informe Cockroft señala en su punto quinto que la enseñanza de las matemáticas debe considerar la *"resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las mismas situaciones de la vida diaria"*.
- El Concejo Nacional de Profesores de Matemática de Estados Unidos, declaraba hace más de diez años que *"el objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas"*.
- En el libro de Hofsdadter, Gödel, Escher y Bach, se dice que *"las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las Matemáticas a partir de la resolución de problemas, siempre y cuando éstos no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un proceso en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones"*.
- Santaló (1985), gran matemático español y además muy interesado en su didáctica, señala que *"enseñar matemáticas debe ser equivalentes a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas"*.
- En una conferencia pronunciada en 1968, George Polya decía: *"Está bien justificado que todos los textos de matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden, incluso, considerarse como la parte más esencial de la educación matemática"*.
- Miguel de Guzmán (1984) comenta que *"lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas, es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativos a entes con poco significado, si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas"*.



7. EL ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS DE POLYA

George Polya, considera 4 etapas en el proceso de resolución de problemas. Dicho proceso se inicia, siempre, en la comprensión del enunciado o contenido del problema. Si no se entiende un problema ¿Cómo se lo puede resolver?. Luego debe concebirse una estrategia o plan para resolverlo.

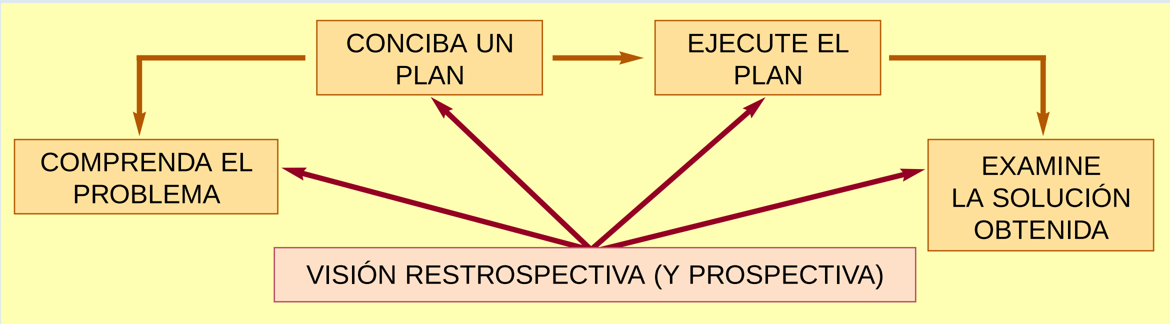
El siguiente paso es ejecutar metódica y sistemáticamente el plan, hasta legar a la solución. Finalmente, debe examinarse su consistencia. En todos estos pasos, será necesario actuar con una visión retrospectiva, es decir, tratando de lograr metacogniciones.

PRIMERO: Comprenda el problema.
¿Y qué significa comprender un problema? Para comprender un problema será necesario responder estas preguntas básicas:

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

SEGUNDO: Conciba un plan
Encuentre la relación entre los datos y las incógnitas. De no encontrar una relación inmediata considere problemas auxiliares. Obtenga finalmente un plan de solución que puede lograrse si, previamente, se ha tomado en cuenta los siguientes aspectos:

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? o ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar?
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto mis accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición descarte la otra parte. ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos están más cercanos entre si?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado todas las nociones esenciales concernientes al problema?



TERCERO: Ejecute el plan
Ejecutar un plan consiste en implementarlo y desarrollarlo según lo previsto, sin embargo, es importante tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Al ejecutar su plan de la solución compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrarlo?

CUARTO: Examine la solución obtenida.
Estos preceptos son, entonces, descompuestos hasta el nivel "molecular" en las páginas siguientes. Ahí se sugieren estrategias individuales que podrían ser utilizadas en momentos apropiados.

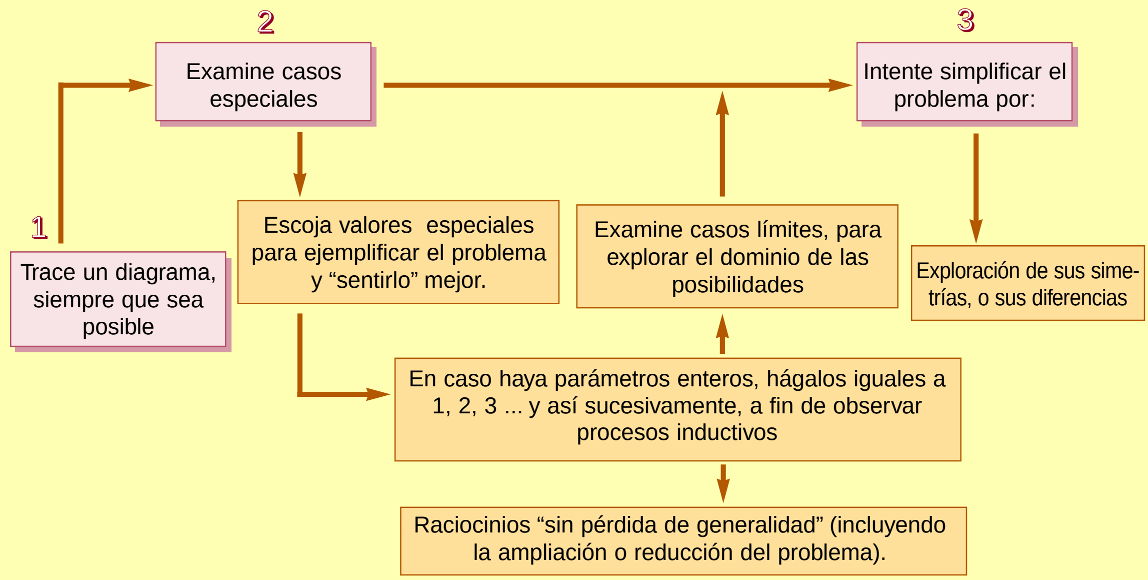
Visión retrospectiva

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Investigadores posteriores desarrollaron las ideas de Polya, de varias maneras. A. H. Schoenfeld, por ejemplo, hizo una tabulación interesante de los **principios heurísticos más frecuentemente usados** en matemática en el nivel de educación secundaria, cuyos pasos se presentan a continuación:

LOS TRES PASOS DE A. H. SHOENFEL PARA SOLUCIONAR UN PROBLEMA

Análisis. El análisis de un problema se lleva a cabo a través de los siguientes pasos:



Exploración. Para la exploración, a su vez, se consideran los pasos siguientes:

1. **Considere problemas esencialmente equivalentes**

a) Sustituyendo las condiciones por condiciones equivalentes.

b) Recombinando los elementos del problema de maneras diferentes.
c) Introduzca elementos auxiliares.
d) Reformule el problema por:
   i) Cambio de perspectiva o notación.
   ii) Consideración a razonamientos por contradicción o contraposición.
   iii) Suposición de que usted tiene una solución y halle sus propiedades.

2. **Considere problemas ligeramente modificados**

a) Escoja sus objetivos (obtenga el cumplimiento parcial de las condiciones)
b) Afloje una condición y ensáyela luego reimpóngala.
c) Descomponga el dominio del problema y trabaje caso por caso.

3. **Considere problemas ampliamente modificados**

a) Construya un problema análogo con menos variables.
b) Mantenga todas las variables fijas, menos una, a fin de determinar la influencia de ella.
c) Intente explorar problemas relacionados cualesquiera que tengan:
   i) Forma semejante
   ii) Datos semejantes.
   iii) Conclusiones semejantes.

Pero, ¡recuerde!:
Cuando trabaje con problemas relacionados más fáciles, usted debería intentar explorar tanto el resultado como el método de solución en el problema principal.

8. DISEÑO DE ACTIVIDADES DE CLASE (Desde la perspectiva de solución de problemas)

Las actividades o tareas que el docente proponga deberán tener al estudiante como protagonista, él deberá inventar la solución de un problema, elaborar un código de representación, descubrir dónde hay un error en un procedimiento o proponer y llevar a cabo un plan de acción para probar una hipótesis. La resolución de la tarea involucra procedimientos que el estudiante elegirá para tratar de alcanzar el éxito.

En la puesta en marcha del procedimiento utilizará algunas alternativas, luego las abandonará por otras, sin que cada secuencia de acciones sea conocida por él, al comienzo de la tarea. Él irá eligiendo cada secuencia de acciones, sustituyendo las adoptadas hasta descubrir la solución. Los aspectos de invención y descubrimiento surgen entonces en el interjuego entre las teorías que va armando - que lo acercan al objetivo que persigue - y las secuencias de acciones implementadas, llamadas también estrategias de resolución.

En el colegio hay que proporcionar a los alumnos actividades adecuadas al desarrollo de problemas matemáticos reales, porque esos problemas les dan la oportunidad para reflexionar y reorganizar sus formas de pensar. Ahora sabemos también que las capacidades, las destrezas y las habilidades, así como los conocimientos y los valores, bien aprehendidos, son los que están ricamente relacionados entre sí o con experiencias previas. Además sabemos que las ideas nuevas no son aceptadas por el alumno hasta que ellas son tan fuertes que provocan la reorganización del material existente en un nuevo sistema que mantiene juntos la nueva idea y las antiguas, transformadas.

Es necesario también que al menos la introducción de cada nuevo tema sea hecha a través de situaciones problemáticas que induzcan a los alumnos a la exploración y formulación de conjeturas, poniéndolos en situación de participar, de descubrir y de jugar en un clima de libertad y sin tensión. Además es importante que ellos trabajen no solamente interpretando las situaciones que se presentan, sino también construyendo y organizando los contenidos matemáticos involucrados en esas situaciones.

Entonces el material de aprendizaje para un determinado tema debe comenzar con una situación que contenga varias informaciones y con una invitación a considerar otras informaciones que pueden ser encontradas a partir de las dadas. Al realizar las actividades consideradas, varios errores y conceptos equivocados pueden aparecer y, de ese modo, el profesor puede ayudar a los alumnos a corregirlos y resolverlos poniendo de manifiesto esos errores a través de discusiones.

Debemos considerar también que un ambiente de respeto mutuo, donde ellos se sientan libres para explorar ideas matemáticas, hacer preguntas, discutir sus ideas y cometer errores, es importante para aprender más y mejor. Además, la utilización del lenguaje escrito y oral ayuda a clarificar el pensamiento.

En una clase de matemática, en cualquier nivel, debe haber oportunidad para:

- Discusión entre profesores y alumnos y entre ellos mismos.
- Trabajo práctico apropiado.
- Consolidación y práctica de las habilidades, destrezas y rutinas fundamentales.

- Resolución de problemas (incluyendo la aplicación de la matemática en las situaciones cotidianas).
- Trabajo apropiado de investigación.
- Exposición del profesor, que debe ser: motivadora, de soporte y fundamentación, de conclusión, etc.

– Diseño de una sesión de aprendizaje. Para diseñar una sesión de aprendizaje debemos considerar desde la perspectiva de la solución de problemas, las siguientes fases:

1. **Fase de inicio:** en este momento se deben presentar situaciones de aprendizaje como: las de motivación, las de una situación problemática, las de exposición de conocimientos previos, las de comprensión inicial del problema o tema, las de recuperación de la información.

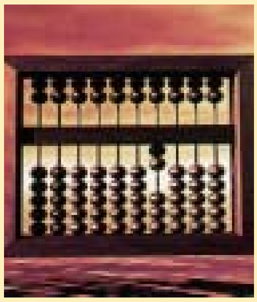
2. **Fase de experimentación:** corresponde a situaciones como indagación; establecimiento de relaciones entre conocimientos previos y problemática planteada; organización del trabajo, temas y subtemas; organización de los alumnos para realizar el trabajo; observación de fenómenos; búsqueda bibliográfica; comparación y análisis de datos; ordenación de hechos, etc.

3. **Fase de objetivación:** corresponden a este momento situaciones de aprendizaje tales como: procesamiento de la información; clasificación y síntesis de datos; generalización de patrones, demostración de propiedades, comprobación de un problema o algoritmo, demostración de un teorema; situación de análisis y síntesis; situación de representación de fenómenos.

4. **Fase de aplicación:** en esta etapa se dan: la inferencia de fenómenos y

las situaciones de transferencia por extrapolación (utilización de conceptos y procedimientos en situaciones problemáticas parecidas a las estudiadas).

5. **Fase de evaluación:** participación y cumplimiento de tareas; producción y conocimiento matemático; producción de un trabajo en grupo; extensión y aplicación de conocimientos.



9. USO DE MEDIOS Y MATERIALES

– La calculadora. La calculadora y la computadora están influyendo en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Ya no es necesario ejecutar muchas de las rutinas de cálculo, donde se emplea tanto tiempo, pudiendo entonces con esas ayudas hacer que nuestros alumnos se dediquen a los procesos mentales matemáticos y a su vinculación con los problemas reales. En ese sentido, por lo menos se debería utilizar la calculadora, siempre que fuera posible, de modo que los alumnos puedan explorar, investigar y verificar sus hallazgos con independencia.

La educación secundaria debe adaptarse a la vida actual, modernizarse y adecuar a sus alumnos a la sociedad en que viven, en la cual van a luchar por la vida y, a la cual tienen que transformar. Para hacerlo, es esencial saber manejar los instrumentos que la tecnología ha puesto al servicio de ella. En segundo lugar, el uso de los instrumentos tecnológicos - como una calculadora u otra máquina - libera al alumno de largas, aburridas e innecesarias tareas, dejándoles más tiempo para mejorar su capacidad de pensar.

Cuando el alumno ya domina con eficiencia las operaciones y sus reglas, cuando los cálculos numéricos son solamente auxiliares en el estudio de otras teorías, cuando se quiere evitar una innecesaria pérdida de tiempo con cálculos prolongados, es hora de el alumno utilice la calculadora. Con ello se ganará, en capacidad para investigar relaciones entre los números, aproximaciones y, sobre todo, resolver problemas que no podrían hacerse actualmente sin el uso de la calculadora.

Un corolario de ese razonamiento parece inevitable y está siendo, de hecho, defendido como norma a ser adoptada: deben ser abolidas las tablas complicadas y los cálculos manuales extensos. Sin embargo, memorizar las tablas y las reglas de cálculo aritmético, cuando se es joven y se tiene buena memoria, es adquirir una habilidad más en términos de automatismos como lo son los actos mecánicos de andar en bicicleta, que no molestan en nada, pero que pueden ser útiles en varias ocasio-

nes. Eso sin hablar del aspecto educativo, como una forma de disciplina mental, en el orden y en la atención necesarias a esas operaciones, las cuales pueden venir a constituirse en hábitos de trabajo cuando son transferidas a otras situaciones.

– **La computadora.** Un mito común, asociado con el uso de las computadoras en las aulas, es que éstas harán nuestra enseñanza y el aprendizaje de nuestros estudiantes más fáciles. Ese mito se basa en la suposición de que la computadora enseñará por nosotros. Pero, de hecho, enseñar con computadoras requiere mucho más trabajo. Requiere conocimiento y habilidad en el uso de una herramienta nueva y, en ocasiones, improvisar y desarrollar maneras nuevas de trabajar con esta herramienta en el aula.

Particularmente, debido al ritmo de crecimiento de esta tecnología, los otros materiales de enseñanza de apoyo no han podido mantenerse a dicho ritmo. En consecuencia, la enseñanza utilizando tecnologías nuevas requiere mucho esfuerzo por parte del profesor. En lo que concierne a los estudiantes, mucha gente presume que todos los estudiantes disfrutarán y aprenderán mejor con computadoras. Pero, hay algunos estudiantes que se sienten incómodos o tienen una actitud negativa hacia aquéllas. Los estudiantes acostumbrados a depender del profesor o de otros para comenzar a resolver un problema de matemática podrían no apreciar la oportunidad de trabajar independientemente y sin supervisión durante un intervalo de tiempo. Por tanto, aprender a utilizar una computadora presenta desafíos nuevos para ellos.
Las computadoras y las calculadoras, en general pueden considerarse como herramientas para ahorrar tiempo y para que nos ayuden a automatizar y realizar tareas repetitivas y tediosas. Esto significa que las computadoras y las calculadoras permiten que los estudiantes concentren sus esfuerzos en razonar y en la resolución de problemas. Pero, primero hay que disponer de ellas y luego, hay que saber manejarlas. Aprender su manejo puede darse siempre que tengamos acceso a una de ellas.

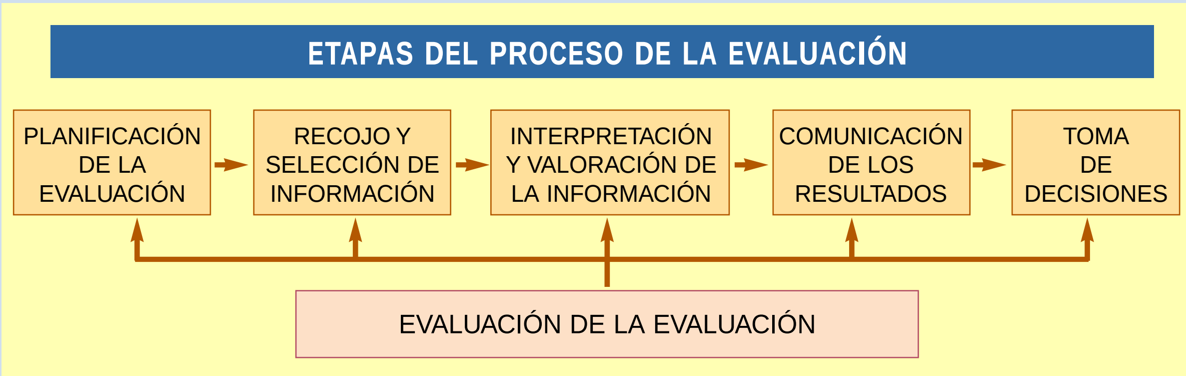
Las computadoras y las calculadoras, hacen posible que los estudiantes tengan acceso a áreas de matemática a las que no podían acceder antes de su aparición. Las hojas electrónicas de cálculo y los paquetes estadísticos, por ejemplo, hacen posible explorar relaciones matemáticas dentro de un conjunto determinado de datos de múltiples maneras: gráficamente, utilizando tablas y algebraicamente. Agreguemos a esto que, actualmente, se puede encontrar en el mercado, software que permite desarrollar habilidades y conceptos matemáticos a través de la exploración y de actividades interactivas, así como la manipulación y visualización de conceptos que son difíciles de lograr con materiales concretos de tipo no tecnológico.

CAPÍTULO IV

ORIENTACIONES SOBRE EVALUACIÓN

1. CÓMO EVALUAR EL APRENDIZAJE

La evaluación en el área de matemática debe contribuir **a saber cómo y cuánta** matemática aprenden los estudiantes. Desde esta perspectiva, la evaluación se concibe como la posibilidad de "... obtener información sobre los logros de aprendizaje de los alumnos, con el objeto de identificar los problemas y sus causas, para poder generar distintas estrategias que aporten soluciones para cada una de las dificultades". Resulta evidente, en consecuencia, que la evaluación es un proceso. Como tal, se desarrolla a través de "etapas". Estas, se presentan en el esquema siguiente:



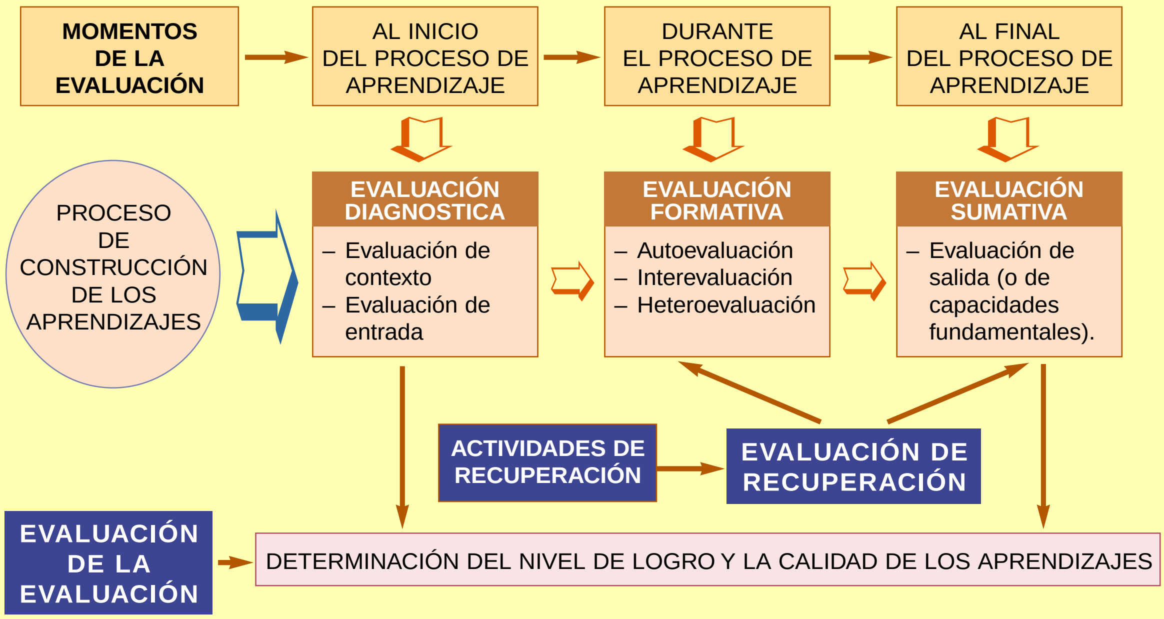
Una evaluación, siempre, debe ser algo más que un examen. Una evaluación debe ser un proceso continuo dinámico y con frecuencia, informal. La "informalidad" de la evaluación se manifiesta, por ejemplo, en afirmaciones de los profesores como las siguientes: *parece que Luis tiene problemas con la representación gráfica de funciones* o *Ana demostró tener mucha intuición cuando resolvía esos problemas de ecuaciones exponenciales*. La evaluación debe ser algo más que el establecimiento de conclusiones definitivas. La evaluación debe ser cíclica, por naturaleza, es decir, un proceso de observación, conjeturas y reformulación constante de juicios sobre estructuras conceptuales de los alumnos.

Examinar para calificar es una de las formas más comunes de evaluar. Pero la evaluación es una tarea más amplia y más básica, diseñada para hallar qué saben los estudiantes y cómo piensan acerca de la matemática. La evaluación debe originar una *biografía* del aprendizaje de los alumnos y una base para mejorar la calidad de la docencia. En efecto, la evaluación no tiene razón de ser a menos que sea para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje.

Existen muchas técnicas de evaluación: baterías de tests, cuestionarios con preguntas dicotómicas (verdadero, falso), de opción múltiple, de respuesta corta, de discusión, abiertas, de laguna, de completamiento, de desempeño, etc; así como, entrevistas estructuradas o libres; trabajos en casa; proyectos, escenificaciones y exposiciones en clase, entre otras. Sin embargo, de todas estas técnicas, algunas son más adecuadas que otras para lograr que los estudiantes desarrollen su capacidad de pensar (creativa y críticamente), de tomar decisiones y solucionar problemas de la vida cotidiana.

Sea cual sea el objetivo de la evaluación, ésta no debe apoyarse jamás en un sólo instrumento o en una sola técnica. Tampoco debe hacerse en un solo momento, en una sola etapa o sobre la base de un único instrumento. Es obvio que el proceso de evaluación es complejo pero no difícil ni imposible. El esquema siguiente nos muestra como debe llevarse, adecuadamente, este proceso.

ESQUEMA DEL PROCESO DE EVALUACIÓN EN EDUCACIÓN SECUNDARIA



2. ORGANIZACIÓN DE LA EVALUACIÓN

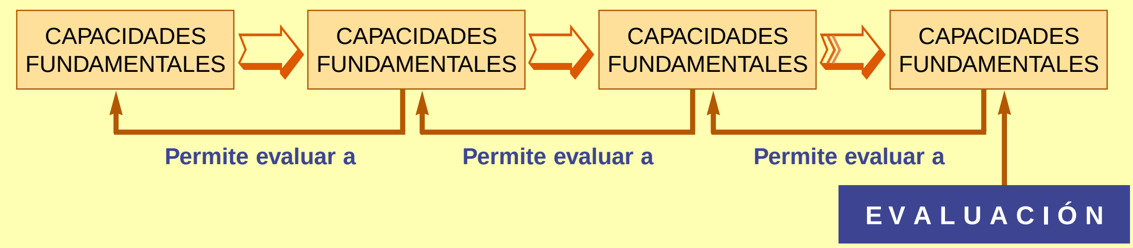
Para tener ***evidencias*** del aprendizaje de las capacidades previstas en el DCB, por parte de los estudiantes, se requiere ORGANIZAR y ejecutar en forma sistemática las etapas que comprende la EVALUACIÓN. Sin embargo, en la práctica, la tarea se concreta en el acto de definir con claridad y precisión, los indicadores respectivos, por constituir éstos la base para la elaboración de los instrumentos. Los ***indicadores*** son los componentes que permiten organizar la evaluación, por cuanto constituyen la guía que permitirá diseñar o formular los diferentes procedimientos, técnicas, instrumentos y los demás elementos del proceso. Por ejemplo, si un indicador está definido en términos de observación, exigirá la elaboración de las fichas de destrezas, habilidades y procesos que habrá que observar, así como los procedimientos y estrategias correspondientes. En otros términos, cualquier evaluación se organiza en función de los indicadores previstos.

3. INDICADORES DE EVALUACIÓN

Un indicador de evaluación – como su nombre mismo lo expresa – debe precisar o señalar (indicar) algo que se desea verificar. Desde la perspectiva del aprendizaje de CAPACIDADES, un indicador PUEDE SER un rango, un intervalo, un parámetro, un ratio, un coeficiente o un dato en general, que nos debe servir de referente y que funciona como base de comparación, para situar e interpretar el desempeño de un sujeto con respecto a su aprendizaje. Los indicadores sirven para establecer el punto de corte a partir del cual se califica el logro o no logro de las capacidades del área, los contenidos básicos considerados y las actitudes a evaluar.

Un indicador, por último, puede ser un enunciado o una declaración de principio sobre qué tiene valor o es relevante en el aprendizaje y qué no lo tiene, proporcionando una visión para poder enjuiciar la validez de los instrumentos de evaluación, al ofrecen una base lógica que permite establecer el avance de los estudiantes. Sin embargo, puesto que el currículo de secundaria está diseñado en función de capacidades, los indicadores estarán orientados a posibilitar la evaluación de éstas, desde las fundamentales: pensamiento creativo, pensamiento crítico, toma de decisiones y solución de problemas, hasta las capacidades de área, que en matemática son tres y las capacidades específicas, cuya cantidad no está definida. La evaluación de las capacidades específicas nos debe llevar a la evaluación de las capacidades de área y, de allí, en el sentido inverso al de una cascada, a la evaluación de las capacidades fundamentales. Resulta evidente que, evaluar directamente las capacidades fundamentales, por su amplitud e implicancias no es sistemático ni metódico, al requerirse siempre para cualquier forma de evaluación, de indicadores específicos, precisos y finos.

INTERDEPENDENCIA DE CAPACIDADES Y ROL DE LOS INDICADORES EN SU EVALUACIÓN



Es obvio que existe una interdependencia entre las capacidades del DCB, sin embargo, los indicadores no se definen exactamente para evaluar las capacidades de área ni las capacidades fundamentales, sino para evaluar las capacidades específicas, porque al hacerlo se estarán evaluando las primeras. En tal perspectiva, a continuación, se tratará de esclarecer en qué consisten cada una de las capacidades de área previstas para matemática.

– **Razonamiento y demostración:** En sus aspectos más generales, el razonamiento y la demostración, como actividades mentales superiores, son inherentes al quehacer matemático y a las capacidades fundamentales de pensar creativa y críticamente, tomar decisiones y resolver problemas. De modo específico, están íntimamente relacionados con los contenidos básicos del área, por ejemplo, los estudiantes "razonan y demuestran" cuando generalizan patrones, cuando explican gráficos u otras formas de representación o simbolismo, cuando fundamentan su decisión de utilizar tal algoritmo en lugar de otro o cuando justifican un procedimiento específico.

Para evaluar el desarrollo de la capacidad de razonamiento y demostración, por lo tanto, será fundamental:

- Reconocer el razonamiento y la demostración como partes esenciales del quehacer matemático.
- Formular, crear e investigar conjeturas matemáticas sobre el aprendizaje de esta capacidad y validarlas.

- Desarrollar argumentos que demuestren objetivamente que lo anterior es válido y se puede probar
- Lograr que los estudiantes razonen y usen varios tipos de razonamiento y demostración en tareas comunes.

– Interpretación de gráficos o expresiones simbólicas: El desarrollo de la capacidad para interpretar gráficos y comprender expresiones matemáticas simbólicas en forma precisa y coherente, es de vital importancia en una sociedad del conocimiento, como la nuestra. El mundo, dada su globalidad e internacionalización de la información, se "matematiza" cada vez más. Disciplinas que antes eran descriptivas y literales, ahora se han matematizado, como es el caso de la lingüística o la semiótica, en tanto otras, simplemente, han formalizado su lenguaje, es decir se han vuelto disciplinas matemáticas, como es el caso de econometría o la demografía.

Desde otra perspectiva, hablar o escribir en lenguaje formalizado, permitirá que los estudiantes desarrollen mejor su capacidad de comunicación en general. A su vez, la lectura del lenguaje matemático contribuye a desarrollar habilidades para formular argumentos convincentes y para presentar las ideas en forma esquemática, gráfica o simbólica.

Es bueno recordar entonces que, para evaluar la capacidad de interpretación de gráficos y expresiones simbólicas, es necesario:

- Organizar y consolidar "formas de pensamiento matemático para comunicar", en los estudiantes.
- Expresar las ideas matemáticas – y las otras - con coherencia y claridad, utilizando gráficos y símbolos.
- Lograr extender el conocimiento matemático y el pensamiento matemático al quehacer cotidiano.
- Poder verificar que el lenguaje matemático es utilizado como un medio preciso de expresión.

– Resolución de problemas: La resolución de problemas es un medio poderoso para desarrollar la capacidad de pensar y un logro indispensable cuando se trata de una buena educación. Un estudiante que resuelve problemas matemáticos en forma rápida y eficiente, está preparado para aplicar esa experiencia en la resolución de problemas nuevos de la vida cotidiana, con la misma eficiencia y eficacia.

Es evidente que la elaboración de estrategias personales de resolución de problemas, crea en los alumnos mayor confianza en sus propias posibilidades, al permitirles controlar ese tipo de situaciones. En ese sentido, para evaluar el desarrollo de esta capacidad será necesario:

- Hacer verificable la construcción de nuevos conocimientos matemáticos a través del trabajo con problemas.
- Desarrollar en los estudiantes la disposición de identificar, formular, representar, abstraer y generalizar situaciones comunes en forma de problemas matemáticos.
- Verificar la aplicación de estrategias y la adaptación de estrategias conocidas de solución de problemas a nuevas situaciones.
- Poder verificar que el estudiante controla y refleja su pensamiento matemático en todos sus actos.

Construcción de indicadores de evaluación.
Sabiendo en qué consiste cada una de las capacidades de área, para formular un in-

dicador de evaluación, lo que se necesita es seleccionar la **capacidad específica** que se desea evaluar; luego, se seleccionará el **contenido básico** y la **actitud correspondiente** a uno de los valores trabajados. Con esos tres componentes: capacidad específica, contenido básico y actitud, se puede construir cualquier indicador.

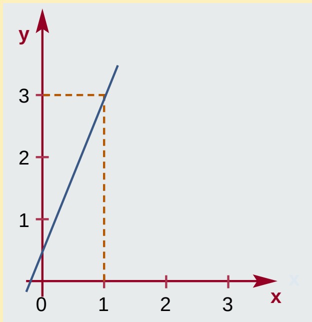
Ejemplo: Si en 2º grado de secundaria se desea evaluar la ***capacidad de área*** "interpretar gráficos y expresiones simbólicas", lo primero que hay que hacer es seleccionar la ***capacidad específica***. En este caso lo que se desea evaluar es la capacidad específica de **"identificar"**. Luego se determinará en qué tipo de contenido básico el alumno identificará y qué es lo que identificará. Para este ejemplo, se elige el contenido básico es **"Funciones. Tablas y gráficos"** y por último, la actitud será: **"demostrando responsabilidad y sentido de cooperación"**.

Ahora bien, de acuerdo con la información presentada en el párrafo anterior, el indicador de evaluación estaría casi explicito y podría ser el siguiente: **"Identifica tablas y gráficos de funciones demostrando responsabilidad y sentido de cooperación"**. Pero, como es fácil advertir, el contenido "tablas y gráficos de funciones" es muy amplio, por lo que se tendría que precisar, tanto en lo que respecta al contenido básico mismo como a la parte que tiene que ver con la actitud. Por lo tanto, al precisar qué es lo que debe identificar en una función o un tabla, el indicador podría quedar formulado del modo siguiente:

"Identifica la gráfica correspondiente a una función dada, por su expresión analítica, demostrando responsabilidad y sentido de cooperación".

Una vez que se cuenta con el indicador, la siguiente tarea es determinar el procedimiento o técnica para luego elaborar el o los instrumentos con los que se evaluará. No hay que olvidar que lo fundamental en este caso, es que voy a evaluar capacidades y no contenidos. La capacidad de área, en este caso es: "interpretar gráficos y expresiones simbólicas". Pero como el contenido básico "Funciones: Tablas y gráficos" es el medio para evaluar dicha capacidad, así como la actitud a evaluar es "con responsabilidad y demostrando sentido de cooperación" podría elegir para el caso de la capacidad una prueba escrita y para el caso de la actitud, la observación sistemática. En ese caso, uno de los el ítems de la prueba escrita podría ser el siguiente:

"La siguiente figura, representa una función real"



¿Cuál es la expresión analítica de dicha función?

A) y = 3x - 1
B) y = 3x + 1
C) y = 3x
D) y = - 3x

Observamos que el ítem ha sido elaborado para una prueba escrita, tipo "objetiva" con cuatro opciones de respuesta o sea que se trata de una prueba de opción múltiple. Para el caso de la evaluación de la actitud: "con responsabilidad y demostrando sentido de cooperación" los ítems de una posible ficha de observación podrían ser los siguientes:

¿Demuestra sentido de responsabilidad al realizar sus tareas?
(   ) Si
(   ) No

¿Ayuda a sus compañeros a resolver sus tareas?
(   ) Frecuentemente
(   ) Esporádicamente
(   ) Casi nunca.

INDICADORES DE EVALUACIÓN POR CICLOS

PRIMER CICLO

Presentamos a modo de ejemplos los siguientes indicadores de evaluación.

EJEMPLO DE MATRIZ DE INDICADORES POR CAPACIDADES DE AREA PRIMER GRADO

RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIÓN	INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS Y EXPRESIONES SIMBOLICAS	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
• Identifica conjuntos. • Distingue entre “pertenencia” e “inclusión”. • Utiliza las expresiones “para todo X”, “para algunos X”, y sus negaciones. • Utiliza gráficas para representar expresiones matemáticas. • Comprende las ideas de “correspondencia y “función”. Da ejemplos y contraejemplos.	**PRIMER GRADO** • Lee números decimales. • Escribe números decimales. • Representa números naturales “grandes” miles de millón, en notación desarrollada y científica. números naturales. • Representa números naturales “grandes” billón en notación desarrollada y científica. • Representa números decimales positivos “pequeños”: milésimos, en notación desarrollada y científica. • Representa números decimales positivos “pequeños”: millonésimos en notación desarrollada y científica.	• Resuelve y enuncia problemas con conjuntos. • Formula y resuelve problemas de adición, sustracción, multiplicación y división con naturales. • Formula y resuelve problemas de adición, sustracción, multiplicación y división con enteros. • Formula y resuelve problemas que involucran adición, sustracción, multiplicación y división con fracciones y decimales (incluyendo porcentajes).

SEGUNDO GRADO

RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIÓN	INTERPRETACIÓN DE GRAFICOS Y EXPRESIONES SIMBÓLICAS	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
• Compara números reales. • Ubica números reales en la recta. • Aplica la propiedad distributiva y sus formas equivalentes • Reconoce relaciones de proporcionalidad directa e inversa. • Identifica monomios y polinomios. • Reconoce el grado de un polinomio. • Identifica variaciones, permutaciones y combinaciones.	• Identifica fracciones en la recta numérica. • Identifica decimales en la recta numérica. • Representa números en notación científica y los usa en situaciones problemáticas. • Reconoce números irracionales. • Identifica funciones. • Reconoce y gráfica funciones cuadráticas. • Describe ángulos determinados por la intersección de rectas y las relaciones entre ellos.	• Formula problemas que involucran enteros (o fracciones y decimales). • Resuelve problemas que involucran enteros (fracciones y decimales). • Formula situaciones problemáticas que requieran para su solución operaciones con números decimales. • Resuelve situaciones problemáticas que requieran para su solución operaciones con números decimales. • Formula situaciones problemáticas que requieran para su solución magnitudes directa proporcionales. (o inversamente proporcionales).

TERCER GRADO

RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIÓN	INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS Y EXPRESIONES SIMBÓLICAS	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
• Identifica proposiciones. • Propone conjeturas. • Identifica proposiciones. • Utiliza cuantificadores y sus negaciones. • Propone ejemplos y contraejemplos. • Identifica progresiones aritméticas y geométricas. • Clasifica ángulos según sus medidas.	• Construye proposiciones utilizando conectivos lógicos. • Traduce un enunciado al lenguaje algebraico. • Identifica números reales en la recta numérica. • Identifica gráficas de funciones. • Identifica puntos, rectas, segmentos, rayos y semirrectas.	• Formula problemas que requieran para su solución operaciones con números reales. • Usa conectivos lógicos • Realiza operaciones con intervalos. • Resuelve inecuaciones de primer grado y segundo grado en una variable. • Resuelve inecuaciones polinómicas • Resuelve inecuaciones con valor absoluto.

CUARTO GRADO

RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIÓN	INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS Y EXPRESIONES SIMBOLICAS	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
• Identifica triángulos semejantes y sus propiedades. • Reconoce las líneas notables de un triángulo. • Identifica poliedros regulares. • Utiliza el teorema de las tres perpendiculares. • Identifica prismas y pirámides. • Identifica cilindros y conos • Reconoce superficies esféricas.	• Grafica funciones reales de variable real. • Interpreta gráficas de funciones. • Interpreta la expresión del Binomio del Newton.	• Calcula áreas de regiones poligonales y de regiones circulares. • Resuelve problemas de regiones poligonales y circulares. • Determina rectas y planos en el espacio. • Resuelve problemas que involucran rectas paralelas y perpendiculares. • Calcula áreas y volúmenes de superficies cilíndricas y esféricas.

QUINTO GRADO

RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIÓN	INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS Y EXPRESIONES SIMBOLICAS	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
• Deduce las razones trigonométricas de ángulos notables. • Identifica y ubica ángulos en posición normal. • Reconoce las identidades trigonométricas y las de suma y diferencia de dos ángulos. • Reconoce las identidades trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad.	• Grafica funciones algebraicas elementales: exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. • Representa gráficamente funciones trigonométricas. • Deduce las razones trigonométricas de ángulos notables. • Deduce las razones trigonométricas de ángulos notables.	• Calcula razones trigonométricas. • Convierte la medida de un ángulo de un sistema a otro. • Calcula razones trigonométricas de un ángulo, a partir de una de ellas. • Calcula razones trigonométricas de ángulos en posición normal. • Aplica la ley de senos y cosenos en la resolución de triángulo rectángulos.

La situación de evaluación. La situación de evaluación se define como el período en el cual se produce intencionalmente un proceso de interacción entre el docente y el estudiantes o entre los mismos estudiantes, con el propósito de recoger información sobre los aprendizajes alcanzados por éstos, con cuyo propósito se emplean los procedimientos, las técnicas y los instrumentos de evaluación que sean pertinentes y necesarios. Si el aprendizaje de la matemática, debe propiciar en el alumno:

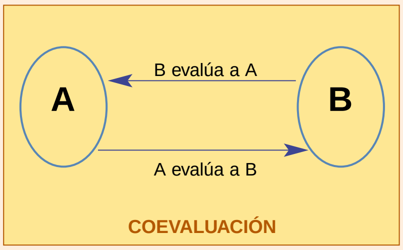
- sólida formación
- capacidad para interpretar, formular y resolver situaciones problemáticas
- capacidad para investigar,
- habilidades para utilizar materiales (material manipulable, calculadoras y computadora), y;
- aptitud para trabajar en equipo,

el profesor debe tomar en cuenta que:

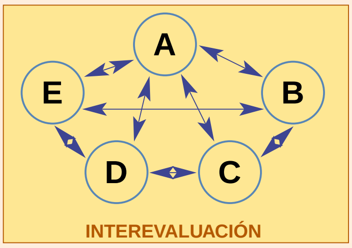
- La evaluación es sólo un factor de mejoramiento del trabajo del docente,
- La evaluación es sólo un medio para verificar el nivel y la calidad de los aprendizajes del estudiante, y;
- La evaluación es un elemento para coadyuvar en la consolidación del aprendizaje de capacidades.

4. LOS PROCEDIMIENTOS DE EVALUACIÓN.

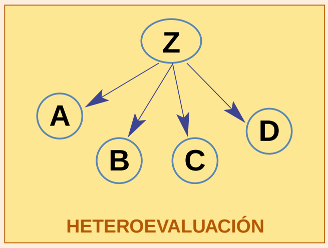
Los procedimientos de evaluación son las formas o modos que se seleccionan para recoger información acerca de los niveles de logro de las capacidades previstas, por parte de los estudiantes. En algunas casos, estas formas o maneras de recoger información son de carácter socializado o grupal. El proceso de socialización de la evaluación, resulta casi siempre de carácter fundamental, cuando se le emplea como medio de formación y de consolidación de los aprendizajes, no sólo porque permite la auto comunica-



COEVALUACIÓN



INTEREVALUACIÓN



HETEROEVALUACIÓN

ción de la información obtenida, sino también, porque al participar en ella los mismos participantes se educan y se forman.

La autoevaluación, la coevaluación (por pares) y la interevaluación, por ejemplo en el caso del aprendizaje de valores y actitudes, son procedimientos que permiten lograr un doble propósito: obtener datos referidos a la evaluación y, formar paralelamente a los que participan en ella, en la práctica de la actitud crítica, la actitud democrática, la solidaridad, etc., sin dejar de lado la capacidad de razonar, fundamentar y demostrar que sus opiniones son correctas o justas.

Son procedimientos de evaluación:

1. Las intervenciones escritas, 2. Las intervenciones orales, 3. Las asignaciones, 4. Los trabajos de investigación, 5. La heteroevaluación, 6.La autoevaluación, 7. La coevaluación, 8. La interevaluación, 9. La carpeta de evaluación, 10. El sociodrama, y otros

Los procedimientos suelen apoyarse en determinadas **técnicas**. Estas vendrían a ser en el proceso de evaluación, algo así como procedimientos específicos que permiten llevar a cabo, con más precisión, la medición o la apreciación, de algún aspecto motivo de evaluación. Por ello, las técnicas dan origen a apreciaciones, juicios o valoraciones basadas en percepciones discriminativas finas y elaboradas de parte del profesional que realiza la evaluación. Son ejemplos de técnicas de evaluación:

- La observación sistemática, en base a una ficha específica de observación de actitudes.
- La entrevista, en función de una ficha de entrevista concreta, para identificar temores o fobias.
- La exposición de un tema específico para verificar desempeño, capacidad de fundamentación, etc.
- La escala de actitudes o el inverso semántico para medir actitudes, etc.

5. LOS INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN.

Se traducen, por lo general, en formularios, fichas, encuestas, pruebas, test u otros de esa misma naturaleza, con los cuales se recoge o capta información para evaluar. Cualquier instrumento de evaluación requiere para su elaboración, de actividades de diseño previo. Es importante en ese sentido, por ejemplo, elaborar instrumentos en base a una tabla de especificaciones o en función de un diseño axial predeterminado. Una tabla de especificaciones, no es otra cosa que una matriz en la cual se consideran los aspectos motivo de evaluación y el peso o distribución de las preguntas que para caso se ha previsto. Los diseños axiales, son tablas de especificaciones en base a ciertos temas que se constituyen en "ejes" de la evaluación sobre los cuales se enfatizará la acción de evaluación.

Son instrumentos de evaluación:

- Una prueba escrita de tipo objetivo y respuesta cerrada (tipo verdadero falso, de alternativa múltiple, de laguna, de completamiento, etc)
- Una ficha de observación
- Una listas de cotejo
- Una escala de actitudes tipo Lickert

- La estructura de un mapa conceptual, para llenar con conceptos y conectivos, etc.

En la práctica, cada uno de los procedimientos se traduce en un instrumento. Ejemplo: la observación sistemática como procedimiento requiere, necesariamente, de un instrumento que permita recoger los datos deseados en forma organizada, dicho instrumento puede ser una lista de cotejo o una ficha de observación. Sin embargo, independientemente del procedimiento, la técnica o el instrumento que apliquemos, es importante que cuando trabajemos en evaluación, tengamos cuidado de tener en cuenta los siguientes principios:

- **Validez:** es el grado en que un instrumento realmente mide la variable que pretende medir. En nuestro caso, el instrumento debe corresponder a las capacidades que se pretenden evaluar. Con un instrumento diseñado y formulado para evaluar conocimientos, por ejemplo, no es válido evaluar capacidades y, a pesar de que pueda aplicarse la prueba, los resultados no nos dirán nada relevante. En principio la evaluación de capacidades tiene que ser de tipo PROGRESIVA, porque no se puede concebir que un alumno que ha logrado un nivel B en pensamiento crítico en el 2° trimestre, por ejemplo, en el tercer trimestre retroceda a un nivel C. Tampoco es válido obtener promedios o medias aritméticas para la nota final.

- **Confiabilidad:** es el grado en que la aplicación repetida de un instrumento, en situaciones similares, produce iguales resultados en diferentes ocasiones. Una prueba de conocimientos, por ejemplo, si es que es confiable, debe arrojar resultados similares cuando se aplique en condiciones similares. Sin embargo, con mucha frecuencia hemos observado, por ejemplo, que en el 1° trimestre el alumno obtenía buena nota y a fin de año resultaba jalado, con pruebas sobre los mismos contenidos cognoscitivos. Es obvio que, ese detalle es justamente lo que invalida cualquier forma de evaluación de conocimientos porque éstos se olvidan, en tanto, las capacidades se adquieren para siempre.

Convendría, entonces preguntarnos: ***¿vale la pena trabajar para lograr que nuestros alumnos aprendan conocimientos que más tarde o más temprano se olvidarán?*** Es evidente que es mucho más seguro, enseñar CAPACIDADES, porque éstas una vez que se adquieren, no se pierden ni se olvidad. Si de alguna forma adquirimos la capacidad de tomar decisiones, por ejemplo, esta capacidad jamás se olvidará.

A continuación se presenta una relación de procedimientos e instrumentos aplicables.

- Observación sistemática: Ficha de observación, Lista de cotejo, Lista de verificación de capacidades.
- Intervenciones o situaciones orales de evaluación: Diálogo,Debate, Examen oral, Exposición
- Ejercicios prácticos: Mapa conceptual, Análisis de casos, Proyectos, Diario, Portafolio, Ensayo.
- Intervenciones escritas
- Pruebas de desarrollo o de desempeño.
- Examen temático.
- Ejercicio interpretativo.
- Pruebas objetivas: De completamiento o laguna, De respuesta alternativa (si a entonces no b),De correspondencia o apareamiento, De selección múltiple, De ordenamiento, De dicotomía (verdadero / falso), Escala de actitudes (tipo Lickert), Diferencial semántico, La carpeta o portafolio (legajo de progresos), Webb de interés (para donde haya internet), etc.

BIBLIOGRAFÍA

ALSINA, C. et al, (1996). ***Enseñar matemáticas***. Barcelona. Editorial Graó.

BERTONI, Alicia. et al, (1997). ***Evaluación, Nuevos significados para una práctica compleja***, Bogotá, Editorial Norma, Kapeluz.

BIEMBENGUT, M y HEIN, N, (2000). ***Modelagem matemática no ensino***, Sao Paulo, Editorial Contexto

BLANCA, NARCEA, (1990). ***Evaluación criterial***, Madrid, Gómez Arbeo, S. A. de Ediciones.

CORBALÁN, Fernando, (1995). ***La Matemática aplicada a la vida cotidiana***. Barcelona, Editorial Graó, de Serveis Pedagógics.

CHEVALLARD, Ives et al, (1997). ***Estudiar Matemáticas***, Cuadernos de Educación N° 22, I.C.E. Universitat Barcelona. Editorial Horsori.

GOÑI, Jesús M. et al (2000). La evaluación en matemáticas, Aula de Innovación Educativa N° 93, 94. Barcelona.

ICC (Centro lnternacional de Coordinación del TIMMS), (1992). ***Project Overview, Canadá***.

LEON PEREIRA, Teresa, (1997). ***Indicadores***, Un mirador para la educación, Bogotá, Editorial Norma.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS, (1985). ***Las Matemáticas si cuentan***, Subdirección de perfeccionamiento del profesorado, lnforme de la Comisión de lnvestigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas en las escuelas bajo la presidencia del Dr. W. H. Cockcroft, (Inglaterra y Gales) Edición en castellano.

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN, (1996). ***Propuesta de Tablas de Especificaciones***, Buenos Aires, Dirección Nacional de Evaluación.

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN, (1995): ***Recomendaciones metodológicas para la enseñanza***, Buenos Aires, Secretaría de Programación y Evaluación Educativa.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. REPÚBLICA DE CHILE. ***Matemática. Programa de Estudio***. Primer Año Medio. Santiago, 1998.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM), U. S. A. (1989). ***Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática***, Edición en Castellano publicada por la Sociedad Matemática Andaluza, 1991.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM), U.S.A. (1999): ***Principles and Standards for School Mathematics***: Discussion Draft. Virginia.